Definice, které se nám na tyto úkoly budou hodit:

Graf nazýváme *k-regulární*, pokud má všechny stupně stejné a rovnají se k. Každá kružnice je 2-regulární graf.

Graf G obsahuje graf H jako *podgraf*, pokud H umím vytvořit z G odebíráním vrcholů a hran. Graf G obsahuje I jako *indukovaný podgraf*, pokud I umím vytvořit z G jen pomocí odebírání vrcholů.

Hranu e nazveme *mostem*, pokud se počet komponent zvýší o jedna, pokud hranu e odebereme z grafu.

Řekneme o grafu, že je *k-obarvitelný*, pokud existuje funkce $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ taková, že každá hrana je dvoubarevná, čili $\forall uv \in E(G) : c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu G* je minimální k takové, že graf G je k-obarvitelný. Všimněte si, že 2-obarvitelný graf je bipartitní a naopak.

O grafu G, $|G| = n$ řekněme, že je d-degenerovaný, pokud pro něj existuje (lineární) uspořádání všech vrcholů $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ s následující vlastností:

První vrchol v_1 v tomto uspořádání má stupeň nejvýše d. Vrchol v_2 může mít v G stupeň $d+1$, ale musí platit, že v grafu $G - v_1$ (po odebrání vrcholu v_1) už má stupeň nejvýše d. Obecně vrchol v_i musí mít nejvýše stupeň d v grafu $G - v_1 - v_2 - v_3 \dots - v_{i-1}$.

Úkol první [2b] Dokažte, že každý souvislý graf s n vrcholy obsahuje podgraf, který je stromem také na n vrcholech. Dokažte pak také, že každý souvislý graf různý od stromu obsahuje alespoň 3 různé takové stromy. (Ty stromy mohou být izomorfní, ale mají různé hrany.)

Úkol druhý [2b] Dokažte, že každý strom je 1-degenerovaný.

Úkol třetí [2b] Dokažte, že každý graf je $\Delta(G)$-degenerovaný, kde $\Delta(G)$ je maximální stupeň grafu G.

Úkol čtvrtý [2b] Nalezněte všechny grafy, které neobsahují jako podgraf indukovanou cestu délky 2.

Úkol pátý [2b] Dokažte, že žádný 2-regulární graf neobsahuje most, a také, že žádný 4-regulární graf neobsahuje most.

Tip: Dokazujte sporem, zkuste najít spor s lichostí/sudostí stupňů.

Úkol šestý [3b] Dokažte, že žádný k-regulární bipartitni graf neobsahuje most.

Úkol sedmý [3b] Rozhodněte, jestli následující množina grafů S obsahuje dva neisomorfní grafy nebo dokažte, že jsou všechny isomorfní:

- S je množina všech $(n-1)$-regulárních grafů na n vrcholech;
- S je množina všech $(n-2)$-regulárních grafů na n vrcholech;
- s je množina všech $(n-3)$-regulárních grafů na n vrcholech.

Následující úkoly mohou být snáz řešitelné s pomocí příkladů na cvičení o algoritmických důkazech v grafech.

Úkol osmý [3b] Dokažte, že každý graf s m hranami obsahuje podgraf, který je bipartitní a obsahuje alespoň $m/2$ hran původního grafu.

Úkol devátý [2b] Mějme graf G, který je d-degenerovaný. Dokažte, že je pak $d+1$-obarvitelný.

Úkol desátý [2b] Dokažte, že každý graf G s maximálním stupněm Δ obsahuje nezávislou množinu o velikosti alespoň $n/(\Delta + 1)$.