

5. CVIČENÍ Z DM

Kombinatorické počítání: sumy

ÚLOHA NULTÁ. Na tabuli ukázáno:

$$\sum_{k=0}^{\infty} i/2^i = 2, \quad \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k.$$

ÚLOHA PRVNÍ. Spočítejte $\sum_{k=0}^n k2^k$ pomocí metody trojúhelníku (výměna sumace).

ÚLOHA DRUHÁ. Spočítejte $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} 1/k$ pomocí metody „vnoření do kombin. čísla“.

ÚLOHA TŘETÍ. Spočítejte $\sum_{k=0}^n (k+1)k$. Využijte některého z předchozích nebo vzorových příkladů.

ÚLOHA ČTVRTÁ. Spočítejte $\sum_{k=0}^n k^2$. Využijte některého z předchozích nebo vzorových příkladů.

ÚLOHA PÁTÁ. Nyní už bez nápověd spočítejte:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), & \quad \sum_{k=2}^n k^3, & \quad 1 + \sum_{k=0}^n F_k, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2, & \quad \sum_{k=1}^m \binom{k}{m} k, & \quad \sum_{k=0}^n k F_k. \end{aligned}$$

ÚLOHA ŠESTÁ [1B]. Spočítejte:

$$\sum_{k=1}^n k H_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \left(\sum_{i=1}^k 1/i \right).$$

ÚLOHA SEDMÁ [1B]. Pokud B_n označuje počet ekvivalencí na n -prvkové nosné množině, dokažte

$$B_n = (1/e) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Můžete bez důkazu použít $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ a také rekurenci $B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot B_i$.

Tip: Rozepište B_n jako dvojnou sumu a pak vyměňte sumy.