5. DÚ Z DISKRÉTKY

hazardní hry se životem a střední hodnotou

Příklad první – [2b]

Uvažujme konečný pravděpodobnostní prostor, ve kterém všechny jevy mají pravděpodobnost $1/|\Omega|$. Dokažte, že pokud je $|\Omega|$ (počet jevů) prvočíslo, pak jsou každé dva netriviální jevy (rúzné od $\emptyset, \Omega$) závislé.

Nápověda: Připomeňte si definici Ω, kterou jste snad měli na přednášce. Pro osvěžení: $\emptyset$ je nemožný jev, kdy se nestane nic a Ω sjednocení všech jevů, tedy jistý jev, kdy se stane alespoň jedna věc. Pravděpodobnost prvního je 0, pravděpodobnost druhého 1.

Příklad druhý – [2b]

Víme-li, že test AIDS odhalí přítomnost této nemoci s pravd. 0.999, že test zdravému člověku nenajde AIDS s pravd. 0.99, a že AIDS se vyskytuje u 0.006 populace, jaká je pravděpodobnost, že člověk, u kterého byl test pozitivní, AIDS skutečně má?

Příklad třetí – [2.5b]

V předvečer rituální sebevraždy se sešlo n kultistů. Sebevražda probíhá následovně: každý z kultistů zamíří náhodně na jednoho kultistu (může i sám na sebe) a vystřelí jeden smrtící výstřel. Všichni kultisté střílí v ten samý okamžik. Může se stát, že některý kultista tomuto běsnění unikne a nikdo na něj nevystřelil. Jaká je střední hodnota počtu přeživších kultistů? Zapište ji jako vzorec. Tento vzorec pro rostoucí n konverguje k jedné konstantě, zkuste si vzpomenout nebo zjistit, ke které.

Příklad čtvrtý – [2.5b]

Mějme n hypotetických hracích kostek, kde první kostka má jednu stěnu, druhá kostka má dvě stěny, třetí tři stěny a tak dále. Každá kostka je férová, tedy má pravděpodobnost padnutí jedné stěny $1/k$, pokud je stěn právě k. Stejně jako obvyklé kostky, i tyto kostky mají na stěnách napsaná čísla od 1 do k. Hoďme všemi kostkami najednou. Jaká je střední hodnota součtu bodů, které nám padly?

Příklad pátý – [2.5b]

Mějme náhodnou permutaci $\rho \in S_n$ – takto matematik napíše, že permutace je z čísel 1 až n. Pokud si zapíšeme permutaci jako přeuspořádání čísel (náhodná permutace může být například `1 2 6 4 5 3`), pak *levé maximum* je takový prvek, že každý za ním (bráno zleva doprava) už je menší, než prvek sám. V našem příkladu jsou levá maxima čísla `3,5,6`.

Pro náhodnou permutaci spočítejte střední hodnotu počtu levých maxim.