4. DÚ Z DISKRÉTKY

Počítání sum

Příklad 1 – [2b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (1/2^i)$$

Příklad 2 – [3b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i$$

Příklad 3 – [3b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i^2$$

Příklad 4 – [4b]

Dokažte, že pokud označíme počet ekvivalencí na n prvkové množině B_n, pak $B_n = 1/e \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}$, kde $e = \sum_{i=0}^{\infty} 1/i!$, ale také $e = 2.718281828\ldots$.

Může se vám hodit rekurentní vztah

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i.$$

Nápověda: Naučte se vyměňovat pozice dvou $\sum$ – není to nic těžkého. Například:

$$\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} f(i,j) = \sum_{j=c}^{d} \sum_{i=a}^{b} f(i,j),$$

pokud i a j na sobě vůbec nezávisí. Pokud závisí, tak je také můžeme zaměnit, avšak meze a, b se mohou změnit, stejně jako vzorec uvnitř sumy.