Na příští hodině budeme dělat úvod do pravděpodobnosti, a bude se nám hodit mít aspoň základní povědomí o tom, jak se chovají funkce z konečné množiny do konečné množiny. Tomu jsme se bohužel nestihli na cvičení věnovat, a tak to probereme pomocí domácích úkolů.

Funkce neboli také *zobrazení* je operace, která prvkům z definičního oboru X přiřadí jednoznačně prvek z oboru hodnot Y. Tradičně zapisujeme $f : X \to Y$. V takovémto zápisu předpokládáme, že pro všechny prvky z X je definovaná hodnota $f(x)$, ale některé prvky z Y nemusí být přiřazeny.

Příklad první – [1b]

Spočítejte a odůvodněte počet všech možných funkcí z množiny M velikosti m do množiny N velikosti n.

Některé funkce mají speciální názvy. Funkce *prostá* je taková funkce, která pro různé x_1, x_2 má různou hodnotu $f(x_1) \neq f(x_2)$. Typickým příkladem může být funkce $s(x)$ z přirozených čísel do přirozených čísel, přiřazující $s(k) = k + 1$ pro k přirozené. Každá dvě různá čísla musí dostat přiřazenou jinou hodnotu, neboť $x + 1 \neq y + 1$, pokud $x \neq y$.

Funkce $f : X \to Y$ se nazýva *na* nebo také *surjektivní*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje x takové, že $f(x) = y$. Jinými slovy, Y je celé pokryto oborem hodnot. Funkce $s(x)$ z příkladu výše není surjektivní, protože 1 není pokryta, není žádné číslo l, pro které $s(l) = 1$.

Funkce se nazývá bijekcí, pokud je zároveň prostá a na. Takovou funkci si můžeme představit jako spárování prvků X s prvky z Y. Například funkce $p(x) : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ zadaná jako $p(k) = (p(k) + 1)\text{mod}3$ je bijekcí, protože na rozdíl od funkce $s(x)$ přiřazuje něco každému prvku.

Funkce, podobně jako relace, se dají skládat. Je-li funkce $f : X \to Y$ a funkce $g : Y \to Z$, pak umíme snadno definovat funkci $f \circ g : X \to Z$ takto: $f \circ g(x) = g(f(x))$. Pozor na skutečnost, že funkce se skládají „zprava doleva“.

Funkce, které jsou prosté nebo surjektivní, mají různé speciální vlastnosti. Jako například tuto:

Příklad druhý – [1b]

Mějme funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$.

Dokažte, že je-li $f \circ g$ funkce prostá, tak f je také prostá, i když g být prostá nemusí.

Dokažte také, že je-li $f \circ g$ surjektivní, tak g už je surjektivní, i když f nemusí být.

Poslední část DÚ věnujeme počítání prostých a surjektivních funkcí. Nejprve vyřešíme počet prostých funkcí:

Příklad třetí – [2b]

Spočítejte počet všech možných prostých funkcí z množiny M do množiny N, $|M| = m, |N| = n, |N| \geq |M|$.

Nápověda: Zamyslete se nad tím kombinatoricky. Zkuste si malé případy, případy, kdy $|M| = |N|$ a pak vymyslete obecný vzorec. Znalost kombinačních čísel neuškodí.

Nyní následuje počet surjektivních funkcí, který nemá tak hezký vzorec, jako měl počet prostých funkcí nebo počet všech funkcí. I tak ho s pomocí našeho arzenálu už přemůžeme:

Příklad čtvrtý – [3b]

Spočítejte počet všech možných surjektivních funkcí z množiny M do množiny N, kde $|M| = m$ a $|N| = n$.

Nápověda Použijte v řešení Stirlingova čísla 2. druhu a jejich kombinatorickou definici – Stirlingova čísla 2. druhu $\left\{{n \atop k}\right\}$ jsou počet způsobů, jak rozdělit množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sjednocení právě k disjunktních, neprázdných množin. Například $\left\{{4 \atop 2}\right\} = 7$, protože možnosti jsou:

$$\{1,2,3\}\cup\{4\}, \{1,2,4\}\cup\{3\}, \{1,3,4\}\cup\{2\}, \{2,3,4\}\cup\{1\}, \{1,2\}\cup\{3,4\}, \{1,3\}\cup\{2,4\}, \{1,4\}\cup\{2,3\}.$$