1. DÚ Z DISKRÉTKY

Indukce, důkazy

Příklad první – [2b]

Následuje tvrzení a jeho důkaz. Ověřte, že důkaz je v pořádku, a pokud ne, nalezněte přesně místo v důkazu, které je v nepořádku. (Tedy nalezněte chybu v úvaze, nehledě na tom, že tvrzení nemusí vůbec platit.) Pozor na chytáky!

Tvrzení. Mějme přímky $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, n \geq 2$, každé dvě jsou různoběžné. Pak mají všechny společný bod.

Důkaz. Provedeme jej matematickou indukcí podle počtu přímek. Pro každé 2 přímky toto tvrzení platí, tedy základ indukce je v pořádku. Pokračujme indukčním krokem. Mějme $n + 1$ přímek, zatímco víme, že pro n (a menší čísla) toto tvrzení už platí. Vezměme prvních n přímek (vynechejme poslední přímku), podle indukčního předpokladu mají právě jeden společný bod x. Pak vezměme posledních n přímek (vynechejme první přímku). Ty mají také podle indukčního předpokladu jen jeden společný bod, říkejme mu y. Vezměme si dvě přímky, které nejsou první ani poslední. Podle tvrzení jsou tyto dvě přímky různoběžné, tedy se protínají v právě jednom bodě. Z indukčního předpokladu ale máme, že se obě protínají jak v x, tak v y. Z toho plyne, že $x = y$ a indukce je dokončena pro $n + 1$ přímek.

Příklad druhý – [2b]

Následuje tvrzení a jeho důkaz. Ověřte, že důkaz je v pořádku, a pokud ne, nalezněte přesně místo v důkazu, které je v nepořádku. (Tedy nalezněte chybu v úvaze, nehledě na tom, že tvrzení nemusí vůbec platit.) Pozor na chytáky!

Tvrzení. Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že jich existuje konečně mnoho, a jsou to $2, 3, 5, 7, \ldots, x$, kde x je největší prvočíslo. Vynásobme tato prvočísla dohromady a přičtěme jedničku, tedy uvažujme číslo $p = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots x) + 1$. Toto číslo p nemůže být dělitelné žádným z našich prvočísel, a je tedy také samotné prvočíslo, dokonce větší než x.

Příklad třetí – [2b]

Dokažte vzorec

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2.$$

Příklad čtvrtý – [2b]

Dokažte, že pro kombinační čísla platí vzorec:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$