

3. PÍSEMKA Z DISKRÉTKY

varianta A – jste nervózní?

Na písemku máte 60 minut. Můžete používat a odkazovat se na jakékoli tiskové materiály, pokud jsou Vaše vlastní. Prosim neopisujte. Nezapomente všechny výpočty radně odvodnit (a dokázat). Hodně štěstí!

PŘÍKLAD PRVNÍ – [5B]

Řekněme, že hrana e grafu G je *most*, pokud $G - e$ má více komponent souvislosti, než G . Dokažte, že graf je les právě tehdy, když je jeho každá hrana mostem.

Les je každý graf, který neobsahuje žádnou kružnici. Nezapomente dokazovat celou ekvivalenci!

PŘÍKLAD DRUHÝ – [5B]

Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení: G buď graf s minimálním stupněm δ , pak existuje bipartitní podgraf $G' \subseteq G$ takový, že jeho minimální stupeň bude alespoň $\delta/2$.

Nápověda: Na cvičení jsme měli tvrzení, že existuje bipartitní podgraf takový, že $|E(G')| \geq |E|/2$. To není zcela to samé, ale znalost tohoto faktu (a jeho důkazu) se může hodit.

PŘÍKLAD TŘETÍ – [5B]

Mějme 4, 6, 8, 12, 20-stěnné běžné kostky s čísly $1 \dots s$. Chceme pomocí nich simulovat jiné kostky, tedy vytvářet s disjunktních množin jevů tak, že každá množina má pravděpodobnost $1/s$ (jako s -stěnná kostka).

Například můžeme použít sčítání hodnot na stěnách, násobení, ale i dalších operací. Kostky můžeme použít několikrát za sebou, ale nesmíme udělat nekonečně mnoho kroků. Nalezněte všechny s , pro která umíme simulovat s -stěnnou kostku, a dokažte, že ostatní čísla generovat nelze.

Například 32-stěnnou kostku mohu generovat tak, že si hodím 5-krát 4-stěnnou kostkou a každý hod budu interpretovat jako 1 bit (dvě stěny mi označují 0, dvě stěny jednotku).

Nápověda: Pokud chci pomocí některých kostek simulovat další kostku, musím rozdělit stavový prostor všech možných výsledků na třídy ekvivalence. Jaké tyto třídy musí být, aby pravděpodobnost, že číslo padne do libovolné z nich, je stejná?

PŘÍKLAD BONUSOVÝ – [8B]

Nalezněte nekonečně mnoho grafů takových, že jsou isomorfní svému doplňku. Jeden z nich je například kružnice na 5 vrcholech. Poznámka: Není potřeba hledat jeden pro každý počet vrcholů, stačí, pokud jich je nekonečně mnoho.