

## 2. PÍSEMKA Z DISKRÉTKY

varianta A

Na písemku máte 60 minut. Můžete používat jakékoli tiskene materiály, pokud jsou Vaše vlastní. Prosim neopisujte. Nezapomente všechny výpočty radně odůvodnit (a dokázat). Hodně štěstí!

### PŘÍKLAD PRVNÍ – [5B]

Mějme  $n$  lidí, kde házíme mincí mezi každými dvěma lidmi, a padne-li panna, dvojice se zná, a padne-li orel, dvojice se nezná. (Chcete-li, je to náhodný graf.)

Spočítejte střední hodnotu počtu trojic lidí, kde se (uvnitř trojice) všichni znají. (Chcete-li, střední hodnotu počtu trojúhelníků v náhodném grafu.)

### PŘÍKLAD DRUHÝ – [5B]

Vyřešte sumu pro  $n \geq m \geq 0$

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} / \binom{n}{k}.$$

Můžete a nemusíte využít této sumy z taháku:

$$\sum_{k=0}^n k^c = (n+1)^{c+1} / (c+1).$$

### PŘÍKLAD TŘETÍ – [5B]

Dokažte, že každé kladné přirozené číslo  $n$  lze jednoznačně zapsat jako součet Fibonacciho čísel (tedy použijeme místo binární „Fibonacciární“ soustavu) s dvěma požadavky: jednak, každé Fibonacciho číslo může být použito nejvýše jednou (jako u binárních čísel) a navíc musí platit, že nikdy nejsou použita dvě Fibonacciho čísla, která jdou za sebou (jinak by rozklad nebyl jednoznačný).

Například 15 je  $13 + 2$ , 16 je  $13 + 3$ , 17 je  $13 + 3 + 1$  a tak podobně.

### PŘÍKLAD BONUSOVÝ – [10B]

Pokládejme homogenní karty o délce 1cm na sebe na kraj stolu tak, aby žádná z nich nespadla. Co to znamená: první z nich můžeme dát tak, aby 1/2cm vyčnívala nad kraj stolu, ale více ne, protože pak by již těžiště bylo za hranou a karta by spadla.

Pokud mám dvě karty, tak je nejlépe mohu položit tak, že horní karta leží 1/2cm na kraji spodní, ovšem spodní musí ležet tak, aby těžiště obou těchto karet bylo ještě na hraně stolu, a to odpovídá 1/4 cm od hrany stolu, tedy konec vrchní karty je 3/4cm od hrany stolu. Pro 3 karty je optimum 11/12 od kraje stolu.

Nalezněte vzorec pro vzdálenost kraje vrchní karty od stolu při nejlepším rozmístění  $n$  karet.