8. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

úvod do teorie grafů

Úloha nultá – připomenutí z minula

Strom je graf, který je souvislý a bez kružnice. Dokažte, že každý strom na alespoň 2 vrcholech má alespoň dva listy (vrcholy, ze kterých vede jen jedna hrana). Pro zajímavost nalezněte pro každé n strom na n vrcholech, který nemá více jak tři listy.

Úloha první

Strom je graf, který je souvislý a bez kružnice. Dokažte, že pro strom platí $|E| = |V| - 1$.

Úloha druhá

Ukažte, že graf na n vrcholech je strom právě tehdy, pokud je jednovrcholový nebo obsahuje list a po odstranění (jakéhokoli) listu je graf na $n - 1$ vrcholech také stromem.

Této technice se říká *trhání listů* a s její pomocí lze dokázat mnohá tvrzení o stromech.

Úloha třetí

Dokažte, že graf je kružnice, právě tehdy pokud pro každé dva vrcholy $u \neq v$ platí, že z u do v vedou právě dvě cesty.

Pokud jste si na přednášce definovali kružnici jako graf, kde vedou právě dvě cesty všude, pak dokažte, že na kružnici takto definované jsou všechny stupně rovny 2.

Úloha čtvrtá

Dokažte, že přidám-li do stromu libovolnou další hranu (nepřidávám nový vrchol, jen spojuji dva stávající), tak vznikne právě jedna kružnice.

Úloha pátá

Ukažte, že každý strom je *bipartitní* – to znamená, že jeho vrcholu umím nabarvit bílou a černou barvou tak, že spolu sousedí vždy jen bílé s černými (nikdy ne stejnobarevné).

Úloha šestá

Kolik existuje různých podgrafů C_k (kružnice o k vrcholech) takových, že každý takový podgraf je stromem na k vrcholech? Kolik z nich je isomorfních?

Úloha sedmá – [1b]

Turnaje už znáte jako relace – dnes už také víte, že jsou to úplné orientované grafy (orientovaný graf má na hranách orientace, tedy jasně určeno, odkud kam hrana vede).

Rovněž už máte zkušenost s tím, že existuje turnaj s mnoha dlouhými cestami – definujme dlouhou *Hamiltonovskou cestu* pro orientovaný graf na n vrcholech tak, že je to cesta na n vrcholech taková, že orientace šipek jsou na této cestě správně (od 1. do 2., od 2. do 3. …). Je důležité, že tato cesta má stejně vrcholů, jako celý graf.

Dokažte, že každý turnaj na n vrcholech obsahuje alespoň jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf. (Tedy to, co jsem chtěl dokázat pravděpodobnostně, ale nevyšlo mi to.) Použijte tentokrát kombinatorickou metodu, například indukci.

Úloha osmá – [2b]

Pokračování sedmé úlohy. Existuje nějaký turnaj, který má pouze jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf? Nalezněte jej. Co je zajímavější, je to, že takový turnaj existuje pouze jeden – dokažte, že pro každý turnaj, který není stejný jako onen protipříklad, už Hamiltonovské cesty existují alespoň dvě.