7. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Pravdepodobnost, sumy naposledy

Příklad první

Spocitejte $\sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{m}{r-i}$. Muzete na ni prijit napriklad tak, ze interpretujete, co tato suma znamena (neni to tezke).

Příklad druhý

Spocitejte $\sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} 1/(k-j)$.

Příklad třetí

Spocitejte sumu $1 + \sum_{i=0}^{n} F_i$.

Příklad čtvrtý

Spocitejte sumu $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i}$. Muze Vam zaroven pomoci resit sumu $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i}{n-(i+1)}$ a Pascaluv trojuhelnik.

Příklad pátý

Permutaci muzeme zapsat mnoha zpusoby. Jeden z nich je, ze mame zobrazeni π – bijekci z $\{1, 2, \ldots, n\}$ do $\{1, 2, \ldots, n\}$. Permutaci pak muzeme rozlozit na nekolik cyklu – disjunktnich posloupnosti cisel $x, \pi(x), \pi(\pi(x)), \ldots$ (nez se vratime zpatky na x).

Jaka je pravdepodobnost, ze cislo 1 se bude vyskytovat v cyklu delky prave k, pokud uvazujeme permutace n cisel, uniformne nahodne?

Priklad šestý

Ukazte, ze pro $n > m(\ln m + 5)$ je nahodne zobrazeni z $\{1, \ldots, n\}$ do $\{1, \ldots, m\}$ surjektivni (na) s pravdepodobnosti alespon 0.99. Muzete pouzit, ze $(1 - 1/x)^x \approx e^{-1}$.

Priklad sedmý

Opilec jde po prirozenych cislech: Z 1 jdeme vzdy na 2, a vsude jinde s pravdepodobnosti 1/2 prejdeme na cislo o 1 mensi nebo cislo o jedna vetsi. Jaka je stredni hodnota poctu kroku, po kterych dosahneme cisla n?

Příklad osmý – [1b]

$\sum_{k=1}^{n} kH_k$.