6. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

„Projdeš písemkou?“ „Nepravděpodobně.“

Příklad první, první část

Turnaj bude relace taková, že pro každé $x \neq y$ bude platit právě jedna z možností xRy a yRx, a žádný prvek není v relaci sám se sebou. Můžete si to také představit tak, že máte sportovní klání n lidí, kde každý hraje s každým a remízy nejsou povoleny. Relace pak říká, kdo s kým vyhrál.

Mějme rovnoměrný náhodný turnaj (pro každou dvojici x, y si hodíme mincí, a podle toho nastavíme relaci). Vezměme jednu permutaci hráčů. Jaká je pravděpodobnost, že tato permutace (pokud bereme jen vztah mezi 1. a 2., pak 2. a 3., atd., podle pořadí, které mi určila permutace) je uspořadaná vzestupně?

Příklad první, druhá část

Použijte výsledek z první části k tomu, abyste dokázali, že existuje turnaj na n vrcholech, který má $n!/2^{n-1}$ různých vzestupných permutací (tedy těch, které jsme definovali výše).

Příklad druhý

Použijte $(1-\frac{k}{n}) < e^{-k/n}$ na spocitani odhadu pravdepodobnosti, ze funkce f neni prosta, a pomoci tohoto odhadu spocitejte, ze na problem „narozeninoveho paradoxu“ staci 23 lidi. (Bude asi potreba pocitat mocniny e^x na kalkulacce, takze staci, pokud dojdete k jednoduchemu vzorci.)

Příklad třetí

Vezměme binární číslo (n bitů, uniformně náhodně). Kolik je střední hodnota počtu jedniček v tomto čísle?

Příklad čtvrtý

Jaká je střední hodnota počtu pevných prvků permutace, brané uniformně náhodně? (Pevný bod je x takové, že $\pi(x) = x$.)

Příklad pátý

Otvirame zamek nasledovne: hodime si minci, vybereme jeden ze dvou klicu, ktere mame, a zkusime ten. Jen jeden klic otevre zamek. Jaky je stredni pocet pokusu, ktere potrebujeme, nez zamek otevreme?

Příklad šestý – [2b]

Uvažujme šestistěnné kostky, které na každé stěně mají napsáno jedno přirozené číslo (ne nutně různé). Řekneme, že kostka A je *lepší* než kostka B, pokud platí, že při současném hodu kostkami s pravděpodobností větší než 1/2 padne na A vyšší číslo, než na B. Nalezněte trojici kostek A, B, C tak, že A je lepší než B, B než C a C než A.