4. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

sumy

Příklad první

Jdeme počítat! Upravte následující výrazy do „hezčí formy“.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3k/3^k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} k.$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\underline{3}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (\sum_{i=1}^{k} 1/i).$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

Nápověda: Mohl by se hodit třeba vzorec

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Následující teorie nebude v žádné písemce. To ale neznamená, že se při písemce nemůže hodit – je to užitečná teorie. Všechny příklady ale půjdou řešit i bez ní.

Dnes bude bonusový příklad s pohádkou. Sumy jsou (podobně jako integrály) nepříjemné v tom, že člověk nikdy moc neví, jak by na ně měl jít. Je sice pár osvědčených postupů, ale člověk nikdy nemá jistotu, navíc některé sumy nemají žádný hezký uzavřený tvar (jako například dnešní $\sum_{k=1}^{n} 1/k$.

Integrály se v matematické analýze často řeší pomocí několika osvědčených pravidel. Jak se na střední škole říká, integrál je vlastně hodně zjemněná suma – nakonec i proto značka $\int$ i značka Σ jsou příbuzné s písmenkem $\mathfrak{s}$. Nešlo by tedy odvodit podobnou teorii, kterou máme pro integrální počet (primitivní funkce, per partes, substituce) i pro konečné sumy?

Ukazuje se, že ano – a takovéto teorii se říká *diskrétní integrace* nebo také *konečný/diskrétní kalkulus*. Zatímco v obecném kalkulu se definuje limita a integrál, tady zadefinujeme podobné pojmy, které nám umožní počítat sumy.

Místo derivace, tedy limity

$$D_f(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))/h$$

se zavádí *diference*, což je hodnota limity pro $h = 1$, nejmenší kladné přirozené číslo:

$$\Delta_f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Povšimněme si, že diference (ani derivace) není klasická funkce, ale operátor (funktor): Jako klasická derivace bere (třeba reálnou) funkci a jejím výsledkem je nová reálná funkce, tady je vstupem funkce na přirozených číslech a diference vrátí novou funkci, opět definovanou na všech přirozených číslech.

Možná vás může zmást notace bez čárky, takže si ověřte, že to chápete, na příkladech:

$$\Delta_{2y} = 2(y+1) - 2y = 2$$
$$\Delta_{y^3} = (y+1)^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1.$$

Všichni známe vztah $(x^n)' = nx^{n-1}$, avšak pro konečný kalkul tento vzorec neplatí. Platí ovšem podobný vzorec, pokud místo polynomu x^n uvážíme tzv. *padající faktoriál*, definovaný jako

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1).$$

Tedy to není nic jiného, než součin n po sobě jdoucích čísel od $x-n+1$ do x. Padající faktoriály se objevují, pokud počítáme kombinační čísla a vykrátíme správné faktoriály. Přesně řečeno:

$$\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!.$$

Příklad druhý – [2b]

Dokažte, že

$$\Delta_{x^{\underline{m}}} = m \cdot x^{\underline{m-1}}.$$

Máme-li „něco jako derivaci“, nabízí se nadefinovat i „něco jako integrál“ jako inverzní operátor k Δ:

Definice. Říkáme, že $S(g) = f$ a říkáme, že *neurčitá suma* z g je f, pokud platí, že $\Delta_f = g$.

Opět platí, že S je operátor, tedy vrací novou funkci na přirozených číslech pro starou funkci na přirozených číslech. Zatím ani nevíme, jestli námi definovaná *neurčitá suma* nějak odpovídá klasickým sumám – nemáme nic jiného, než jeji definici.

Nyní, podobně jako v analýze, definujeme určitý integrál $\int_a^b g(x)dx \equiv f(b)-f(a)$, stejně definujeme *určitou sumu* jako $S_a^b(g) \equiv f(b)-f(a)$. No a nyní si všimneme, že klasická suma $\sum_{i=a}^{b-1} g(i)$ je přesně $f(b)-f(a)$, pokud platí, že $\Delta_f = g$. Námi inverzně definované určité sumy tedy nejsou nic jiného, než součty hodnot.

Zkuste to ověřit sami.

Příklad třetí – [2b]

Dokažte, že nově definovaná „určitá suma“ $S_a^b(g) = f(b) - f(a)$ (pro funkci f takovou, že $\Delta_f = g$) je přesně rovna postaru definované sumě $\sum_{i=a}^{b-1} g(i)$.

Nápověda: Stačí rozepsat pomocí definice diference.

Dá se s určitými i neurčitými sumami pracovat abstraktně, jako s integrály? Ano, ale to si musíme ukázat až někdy jindy.