2. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

relace

Příklad mínus první

Jaké vlastnosti mají relace:

- menší nebo rovno pro všechna přirozená čísla
- ostře menší než pro všechna přirozená čísla
- a dělí b pro všechna přirozená čísla.

Příklad nultý

Dokažte, že když vezmu relaci $<$ pro přirozená čísla menší než k, pak R^n už bude prázdná relace. Platí to pro všechny druhy relací na k prvcích?

R^n chápeme jako $R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R$ (n-krát).

Příklad první

Nalezněte relace R, S takové, že $R \circ S \neq S \circ R$. Nalezněte relaci R takovou, že $\forall n : R^n \neq R^{n+1}$.

Příklad druhý

Dokažte nebo vyvraťte, že platí De Morganovy vzorce pro relace, tedy

$$\overline{(R \cup S)} = (\overline{R}) \cap (\overline{S}).$$

Příklad třetí

Už máme několik vlastností relací (reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie) a několik operací s relacemi (sjednocení, průnik, doplněk, součin, složení). Udělejte si tabulku a zjistěte (dokažte nebo vyvraťte), které vlastnosti se zachovávají při operacích a které ne.

Příklad čtvrtý

Kolik je všech možných symetrických relací na n-prvkové množině?

Příklad pátý

Dokažte, že pro každou ekvivalenci existuje *rozklad na třídy ekvivalence* – že prvky v relaci můžeme rozdělit na disjunktní sjednocení hromádek, kde v každé hromádce je každý v relaci s každým a mezi hromádkami není nikdo v relaci s nikým.

Příklad šestý – [2b]

Kolik je všech možných ekvivalencí na n-prvkové množině? Tahák říká, že tento počet je *Bellovo číslo* $B(n)$, které se dá definovat třeba takto:

$$B(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}.$$

Bohužel, tento vzorec používá *Stirlingova čísla druhého druhu*. Ta se definují tak, že $\left\{ {n \atop k} \right\}$ znamená počet způsobů, jak rozepsat množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na disjunktní sjednocení k neprázdných množin.

Tedy $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ můžu napsat jako sjednocení jednoprvkové množiny a tříprvkové množiny (4 možnosti), nebo jako sjednocení dvou dvouprvkových (3 možnosti).

Moment! Je to opravdu taková škoda, že jsme definovali Bellova čísla takto? Dokažte, že pomocí interpretace Stirlingových čísel a sumy v definici Bellových čísel se dá ukázat, že B_n je skutečně počet všech ekvivalencí na n-prvkové množině.