Diskrétka/Kombagra 1

Základní pojmy

Potenční množina: $2^X \equiv$ systém všech podmnožin X.

Faktoriál: $n! \equiv n \cdot (n-1) \cdots 1$.

Padající faktoriál: $n^{\underline{k}} \equiv n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.

$[k] \equiv \{1, 2, \ldots, k\}$, ale také $[n = 1] \equiv 1$, pokud $n = 1$, a 0 jinak.

Kombinační číslo:

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!k!} = n^{\underline{k}}/k! = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Stirlingova čísla (2. druhu):

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \equiv k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Bellova čísla (počet ekvivalencí)

$$B(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$$

Fibonacciho posloupnost:

$$F_0 \equiv 0, F_1 \equiv 1, F_n \equiv F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}; \varphi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Harmonická posloupnost:

$$H_0 \equiv 0, H_n \equiv \sum_{i=1}^{n} 1/i; H_n \approx ln\, n$$

Binomická věta:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Zobecněná binomická věta (r reálné):

$$(x+y)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i y^{r-i}$$

Postup řešení sumačního příkladu

Možnosti, co lze udělat:

- Zkusit malé případy, uhodnout výsledek, dokázat indukcí.
- Rozložit sumu různými způsoby (a la $\sum k/2^k$).
- Využít aritmetiku sum, vyměnit sumace.
- Použít binomickou větu.
- Když nic, tak aspoň vymyslet nějaké odhady.
- Bude: najít lineární rekurenci.
- Použít vytvořující funkce.
- Použít diskrétní integraci.

Známé sumy

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{i+1} - 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i 2^i = (n-1) 2^{n+1} + 2.$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+i}{k-i-1} = F_{2k}.$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+i}{k-i} = F_{2k+1}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1/2)(n+1)/3.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2.$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = 2.$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i/2^i = 4.$$

Teorie grafů

$G = (V, E)$ graf. Hrany $(a, b) \rightarrow$ *orientovaný graf*. *Multihrany* $\{a, b\}, \{a, b\}$ a *smyčky* $\{a, a\}$ se obvykle neuvažují. Značení: $n = |G| = |V|$ počet vrcholů, $m = ||G|| = |E|$ počet hran.

Úplný graf $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$. Je-li orientovaný, říká se mu *turnaj* (mezi 2 vrcholy turnaje je jen jedna or. hrana).

Bipartitní graf má dvě skupiny vrcholu, hrany jdou jen mezi skupinami. *Úplný bipartitní* $K_{m,n}$ má max. počet hran pro dané m, n.

Kružnice C_n má vrcholy zapojene do řetězu. *Cesta* P_n je kružnice bez hrany.

G je *souvislý*, pokud se z každého vrcholu dostanu po hranách do každého jiného. Zobecněně: Graf je (vrholově n. hranově) $(k+1)$-souvislý, pokud po odebrání k (hran n. vrcholů) je graf stále souvislý. Hrana n. vrchol je *kritická*, pokud jejich odebrání sníží k-souvislost. 1-kritická hrana je *most*, 1-kritický vrchol *artikulace*.

Graf T je *strom*, pokud je souvislý a bez kružnice. Graf je *les*, pokud je disj. sjednocení stromů. Každý strom je les, pro les platí $||T|| = |T| - c$, kde c je počet komponent.

Podgraf G' je nějaká podmnožina vrcholů grafu G a nějaká podmnožina těchto vybraných vrcholů. Podgraf je *indukovaný*, pokud vybereme všechny hrany, které mají oba konce v G' a jsou hranami G.

Klika je podgraf, který je také K_i pro nějaké i. *Nezávislá množina* je množina vrcholů, kde žádné dva spolu nesousedí. *Kostra* je největší podgraf co do počtu vrcholů, který je zároveň stromem. Velikost největší kliky se značí $\kappa(G)$, velikost největší nez. množiny $\alpha(G)$.

Barevnost grafu

(Korektní) *obarvení* grafu je přirazení $c : V \rightarrow [k]$, tž sousední vrcholy mají různé barvy. *Barevnost* G je nejmenší k, tak že existuje obarvení. Často se v běžné řeči vynechává požadavek na minimalitu: říkáme, že graf je 4-barevný, i kdyby mohl být i méněbarevný. Barevnost se značí $\chi(G)$.

Dualita a nakreslení

Graf G je *rovinný*, pokud lze nakreslit do roviny, aby se hrany nekřížily. Obecněji, graf má nakreslení na ploše rodu σ, pokud lze na ni nakreslit, aby se hrany nekřížily. Rovina má rod 0, torus 1, Kleinova lahev 2. Jakmile máme nakreslení, máme také *stěny* – souvislé komponenty plochy po odebrání G. Počet stěn zapisujeme $|F|$.

Platí Eulerova formule $= |G| - ||G|| + |F| = 2 - 2\sigma$. Z ní pro nás důležité výsledky pro rovinné grafy: $||G|| \leq 3|G| - 6$, pokud v něm není trojúhelník, tak $||G|| \leq 2|G| - 4$.

Doplněk grafu G je graf G^C, kde hrany se stanou nehranami a naopak. *Line graph* graf G je graf $L(G)$, jehož vrcholy jsou hrany původního grafu a dvě hrany spolu sousedí v line grafu, pokud tyto hrany v G mají společný koncový vrchol. Barevnost line grafu se označuje jako *hranová barevnost*.

Duál $\overline{G}$ grafu G nakresleného na nějakou plochu vytvoříme tak, že do každé stěny umístíme vrchol a dva vrcholy propojíme hranou, pokud v původním grafu tyto stěny měly společnou hranu.

Stupeň v v G je počet hran, které navazují na vrchol v. *Minimální stupeň* $\delta(G)$, respektive *maximální stupeň* $\Delta(G)$ jsou definovány přirozeně. *Průměrný stupeň* $d(G) = ||G||/|G|$.

Graf je *d-degenerovaný*, pokud má vrchol stupně nejvýše d a po odtrhnutí tohoto vrcholu je výsledný graf opět d-degenerovaný. Každy graf je Δ-degenerovaný.

Diskrétní integrace

Místo derivace bereme diferenci, její ekvivalent v konečném světě:

$$\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x).$$

Potom platí, že pokud chceme vyřešit sumu $\sum_{i=a}^{b} g(i)$, pak musíme „diskrétně integrovat“ – najít funkci, jejíž diference splňuje $\Delta(f(x)) = g(x)$. Pak vzorec pro sumu je $f(b+1) - f(a)$, podobně, jako je to v reálném integrálním počtu.

Také víme, že diference x^n se chová ošklivě, ale funkce $x^{\underline{n}}$ má diferenci podobnou, jako derivace x^n:

$$\Delta(x^{\underline{n}}) = nx^{\underline{n-1}}.$$

Z tohoto faktu pak

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{r}} = \frac{(n+1)^{\underline{r+1}}}{r+1}.$$

Princip inkluze a exkluze

Velikost sjednocení můžeme počítat pomocí postupného přičítání a odčítání větších a větších průniků (jejichž velikosti budou menší). Zapsáno matematicky:

$$|\bigcup_{1\ldots n} A_i| = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \sum_{I \in \binom{1\ldots n}{j}} |\bigcap_{I} A_i|$$

Vytvořující funkce

- Najít rekurentní zápis problému, ideálně pomocí 1 rovnice.
- Použít rekurentní vzorec pro zápis $G(x)$ a najít vytvořující funkci ke $G(x)$.
- Rozložit vytvořující funkci, například pomocí parciálních zlomků.
- Z rozloženého tvaru už vyčíst vzorec pro n-tý člen.

Operace s vytvořujícími funkcemi:

$$\sum (g_n + c \cdot f_n) x^n = G(x) + cF(x)$$

$$\sum g_{n-i} x^n = x^i G(x)$$

$$\sum g_{n+i} x^n = (G(x)/x^i) + g_{i-1}x^{i-1} + g_{i-2}x^{i-2} + \ldots + g_0 x^0$$

$$\sum g_i c^n x^n = G(cx)$$

$$\sum g_i x^{cn} = G(x^c)$$

$$\sum n g_{n-1} x^n = G'(x)$$

$$\sum g_{n+1}/(n+1) x^n = \int G(x) dx.$$

$$\sum_n (\sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i}) x^n = F(x) \cdot G(x)$$

Známé vytvořující funkce

$$1/(1-x) = (1,1,1,1,\ldots)$$

$$1/(1+x) = (1,-1,1,-1,\ldots)$$

$$1/(1-x)^2 = (1,2,3,4,5,\ldots)$$

$$1/(1-x^2) = (1,0,1,0,\ldots)$$

$$1/(1-kx) = (1,k,k^2,k^3,\ldots)$$

$$(1+x)/(1-x)^3 = (1,4,9,16,25,\ldots)$$

$$(1+x)^k = (\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots)$$

$$1/(1-x)^{k+1} = (\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \ldots)$$

$$ln\, 1/(1-x) = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$$

$$ln(1+x) = (0, 1, -1/2, 1/3, -1/4, \ldots)$$

$$e^x = (1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, \ldots, 1/k!, \ldots)$$

`Verze 0.03, chyby zaručeny.`