Domácí úkoly 4 – Dnes s pohádkou

Termín odevzdání 16.11.2010.

Za toto domácí cvičení můžete poděkovat/nakopat Honzovi Voborníkovi, protože mne přesvědčil, ať si problematiku nastuduji. :o)

Tato série se bude dále zabývat Stirlingovými čísly, sumami, zvláště pak $\sum_{x=1}^{n} x^c$, naším velkým nepřítelem.

Jak jsme si řekli na cvičení, vzorec pro $\sum_{x=1}^{n} x^c$ se dá nalézt v knížce "Concrete Mathematics" od profesorů Knutha, Grahama a Patashnika.

Tato suma nepatři k nejjednodušším. Nejprve si autoři pomohou tzv. konečným počtem (konečný kalkulus). Místo derivace, tedy limity

$$D_f(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))/h$$

se zavádí diference, což je hodnota limity pro $h = 1$, nejmenší kladné přirozené číslo:

$$\Delta_f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Možná vás může zmást notace bez čárky, takže si ověřte, že to chápete, na příkladech:

$$\Delta_{2y} = 2(y+1) - 2y = 2$$
$$\Delta_{y^3} = (y+1)^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1.$$

Všichni známe vztah $(x^n)' = nx^{n-1}$, avšak pro konečný počet tento vzorec neplatí. Platí ovšem podobný vzorec, pokud místo polynomu x^n uvážíme tzv. **padající faktoriál**, definovaný jako

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1).$$

Tedy to není nic jiného, než součin n po sobě jdoucích čísel od $x-n+1$ do x. Padající faktoriály se objevují, pokud počítáme kombinační čísla a vykrátíme správné faktoriály. Přesně řečeno:

$$\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!.$$

Příklad 0 [4b]

Dokažte, že

$$\Delta_{x^{\underline{m}}} = m \cdot x^{\underline{m-1}}.$$

Pomocí Δ se v této knížce dále definuje konečný počet, avšak my odbočíme z cesty a zkusíme si výsledek, který potřebujeme, dokázat sami:

Příklad 1 [4b]

Dokažte

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^{\underline{m}} = n^{\underline{m+1}}/(m+1).$$

(Pro zajímavost: srovnejte s integrálem x^m.)

Umíme tedy sčítat sumy mocnin padajících faktoriálů, ale ještě ne naše kýžene sumy tvaru $\sum_x x^n$. K nim už je to ale kousíček:

Příklad 2 [4b]

Dokažte, že platí

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x^{\underline{k}}.$$

Nápověda: Použijte vlastnosti Stirlingových čísel, které jsme si (ne)dokazovali na cvičení, jsou zapsané v příkladech z cvičení.

Těmito třemi příklady jsme završili problém $\sum_x x^c$ pro pevné c – podle přikladu 2 umíme každou takovou sumu přepsat na součet padajících faktoriálů krát některá Stirlingova čísla, a sumu $\sum_x x^{\underline{n}}$ už zvládneme spočítat přímo, neboť to jsme ukázali v příkladu 1.

Přesný vzorec pro každé c tedy neuvádíme, ale popsali jsme postup, jak se k takovému vzorci pro každé c dostat, a to by pro informatika mělo být dostatečné.