Domácí úkoly 3

Písemka příští cvičení.

Termín odevzdání 9.11.2010.

Protože někomu z vás přišlo počítání sum jako černá magie hodná alespoň Chucka Norrise, zopakujeme si v tomto textíku, jak se dělal první úkol ze cvičení.

Příklad -1

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Sčítáme druhé mocniny přirozených čísel, těm se říká *čtverce*. Zkusme si tedy představit, že nakreslíme všechny čtverce do čtverečkové sítě na jednu řádku vedle sebe, tak, aby měly všechny společnou základnu. (Bylo to nakreslené na cvičení.) Jakou plochu zaberou? No, všechny čtverce od 1 do n se vejdou do obdélníku $n \cdot (n+1)/2$ ("šířka všech obdélníku vedle sebe) krát n (výška největšího z nich). Ovšem nezaplníme ho celý.

Zkusme spočítat prázdná místa (říkejme jim P), a pak je odečíst od celého obdélníku. To můžeme zapsat jako

$$S = (n \cdot n \cdot (n+1)/2) - P.$$

Máme dva způsoby, jak prázdná místa počítat – buď po řádcích, nebo po sloupcích. Zkusme je počítat po řádcích. Na i-tém řádku (počítáno odspodu) přibude tolik prázdných míst, kolik je součet prvních i přirozených čísel. (Nejprve jedno, pak 3, 6, 10 a tak dále.)

Chceme tedy spočítat:

$$P = \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1)/2 = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (i^2) + 1/2 \sum_{i=1}^{n} i = 1/2 \sum_{i=1}^{n} (i^2) + n \cdot (n+1)/4.$$

Přichází druhý trik – umíme volná místa zapsat jako součet nějakého čísla a poloviny součtu všech čtverců – jenže součet čtverců chceme spočítat! Ovsem zkusme si dosadit do naši původní rovnice:

$$S = n \cdot n \cdot (n+1)/2 - P = n \cdot n \cdot (n+1)/2 - (S/2 + n \cdot (n+1)/4).$$

A protože to celé je rovnice, co nám brání na každou stranu přičíst $S/2$? Nic. Na levé straně dostaneme $3S/2$ a na pravé už hezký vzorec bez sum. Pro hodnotu S pak jen vynásobíme hodnotu vpravo dvěma a vydělíme třemi.

(Mimochodem, tento moc pěkný trik se často používá při počítáni integrálů trigonometrických funkcí, tak ho nezapomeňte!)

Příklad 0 [3b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (1/2^i)$$

Příklad 1 [3b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i$$

Příklad 2 [5b]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i^2$$