Domácí úkoly z Cvičení 1

Termín odevzdání je nastaven na **26.10.2010**.

Připomeňte si, co to znamená **relace** a jaké vlastnosti různé relace mohou (a nemusí) mít: reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie, ekvivalence a částečná uspořádání.

Rovněž jsme na cvičení definovali monotónní zobrazení pro dvě částečná uspořádání: funkce (zobrazení) $f : (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ je monotónní, pokud

$$x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y).$$

Jinými slovy, zobrazení z dvou různých uspořádání zachovává vlastnost "menší než", ale neporovnatelné prvky se mohou stát porovnatelnými. Díky reflexivitě také některé prvky z X mohou "splývat" do jednoho v Y, aniž by byly podmínky porušeny.

Úkol 0 [4b]

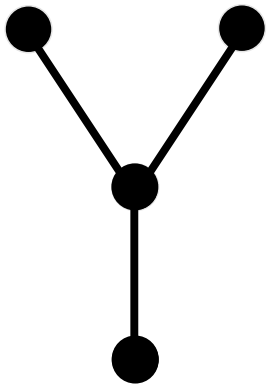
Níže najdete různé způsoby zadání relací. Poté, co jim porozumíte, rozhodněte

- zda-li mají některé speciální vlastnosti (reflexivitu, symetrii, je to částečné uspořádání atd.)
- Jsou-li některé dvě isomorfní (totožné, co do vlastností).
- existuje-li monotónní zobrazení mezi některými dvěma (postačí najít všechna monotónní zobrazení, která jsou *na* – použijí všechny prvky oboru hodnot Y).

První relace je zadána čtvercovou maticí $n \times n$: prvky jsou elementy $x_1 \dots x_n$ na pozici $a_{(i,j)}$ se nachází 1, pokud $x_i R x_j$, a 0 naopak.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Druhá relace je zadána Hasseovým diagramem, jak ho znáte z přednášky. (To znamená, že je to automaticky částečné uspořádání – jiné relace se Hasseovým diagramem nekreslí).



Třetí relace je zadána přímo.

$$a, b, c, d : aRb, bRa, aRa, dRb, bRd, aRd, dRa, cRc, bRb.$$

Nakonec čtvrtá relace je zadána obrázkem, kterému později budeme říkat "graf". Zatím stačí chápat, že body obrázku odpovídají prvkům relace a pokud je xRy, pak z x vede orientovaná šipka do y.

Úkol 1 [3b]

Necht R je usporadani na $X \times X$. Pak vlastnost $xRy(x, y \in X)$ zapiseme taky jako $x \leq_R y$, abychom dali najevo, ze je to usporadani dane R a ne zadne jine.

R^{op} je takove usporadani, pro kterou platí: $x \leq_{op} y \Leftrightarrow y \leq_R x$. Rika se mu **opacne** usporadani. $R \circ S$ je takové uspořádání, pro které platí: $x \leq_{R \circ S} y \Leftrightarrow (\exists s \in X) : x \leq_S s \ \& \ s \leq_R y$. Skládání relací je podobné skládání funkcí (funkce jsou nakonec jen speciální relace).

Muzete si to treba predstavit tak, ze pokud si usporadani R a usporadani S nakreslite jako graf (viz priklad 0), tak slozeni relace $R \circ S$ ma sipku z x do z prave tehdy, kdyz muzeme jit nejprve z x do nejakeho y pres sipku z S, a pak z y do z musi byt sipka z R.

Pozor na to, ze pracujeme s usporadanimi, nikoli jen s obycejnymi relacemi. (Ale i pro ne tyto definice maji smysl.)

Nechť R a S jsou nějaká částečná uspořádání na stejné nosné množině X (mají stejné prvky, jen relace jsou jiné). Rozhodněte, jestli $R \cup S$, $R \cap S$, R^{op} nebo $R \circ S$ jsou také částečná uspořádání nebo ne.

Úkol 2 [3b]

Vezměme množinu n prvků. Kolik existuje různých symetrických relací na této množině, tedy všech možných relací, které mají vlastnost symetrie?

Nápověda: Symetrie vynucuje vlastnosti jen pro dvojici prvků. O vztazích jednotlivých prvků k sobě nic neříká (to má na starost reflexivita), stejně jako neříká nic o vztazích větších skupin prvků (tranzitivita).

Nápověda 2: Jeden způsob je představit si problém v maticovém zápisu jako v příkladu 0. Rozmýšlejte, kde všude je 1 vynucená a kde si můžete Vy vybrat, jestli položíte 1 nebo 0, a symetrii to nezmění.