7. CVIČENÍ

pokračování v grafojízdě

Stupeň vrcholu je počet hran, které z něj vedou – list má například stupeň 1. Pro graf definujeme minimální stupeň δ, průměrný stupeň d (jako $2|E|/|V|$) a maximální stupeň Δ.

Úloha nultá

Dokažte, že graf obsahuje cestu délky (s počtem hran) alespoň δ.

Úloha první

Dokažte, že graf obsahuje kružnici délky $\delta + 1$.

Úloha druhá

Dokažte, že má-li graf průměrný stupeň d, umím v něm vybrat indukovaný podgraf, který má minimální stupeň $d/2$.

Úloha třetí

Matice sousednosti A pro graf G je taková matice, kde počet sloupců i řádků je $|V|$ a dva vrcholy i a j spolu sousedí hranou, právě když v matici je v místě A_{ij} jednička.

- Najděte nějaké zajímavé vlastnosti každé takové matice (počet jedniček atd.)
- Nalezněte matici sousednosti úplného grafu, prázdného grafu, bipartitního grafu (všechno pro parametr n, resp. m, n).
- Souvisí hodnost matice, resp. lineární nezávislost nějaké podmnožiny sloupců s jakousi grafovou vlastností?
- Jak vypadá A^2?

Úloha čtvrtá

Dokažte, že každý souvislý graf splňuje nerovnost $|E| \geq |V| + 1$. Tedy stromy jsou jakési minimální souvislé grafy. Říkáme, že graf je *les*, pokud je rozdělený do k komponent a bez kružnice. Nalezněte podobnou rovnici, kterou umíme popsat lesy.

Úloha pátá – [3B]

Z minula – uvažme turnaj (orientovaný úplný graf). Pokud turnaj nemůžeme na jeden řádek tak, že všechny hrany vedou zleva doprava, tak obsahuje aspoň dvě Hamiltonovské cesty – cesty na $|V|$ vrcholech. Všimněme si, že onen zakázaný turnaj obsahuje pouze jednu.