Cvičení 2

Písemka za 14 dnů.

Příklad 0

Kolik existuje různých rozkladů přirozeného čísla N na součet menších kladných přirozených čísel? Dokažte. V tomto případě povolíme více stejných sčítanců a na pořadí záleží (tedy 3+2+1 není totéž, co 1+2+3).

Příklad 1

Je-li zobrazení f {prosté, na} a g {prosté, na} bude pak i zobrazení fg (f složeno s g) {prosté, na}? Prozkoumejte všechny případy (f prosté, g na a tak dále).

Příklad 2

(Tady přestává legrace.) Stirlingova čísla druhého druhu $S(n,k)$ definujeme jako počet různých rozkladů n prvkové množiny na k neprázdných množin. Třeba 3-prvkové množina jdou rozložit na 2 množiny $\{1\},\{2,3\}$, $\{2\},\{3,1\}$ a $\{3\},\{1,2\}$, takže $S(3,2)=3$. Dokažte následující vztahy:

$$S(n,1)=1, S(n,n)=1, S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k).$$

$$S(n,n-1)=\binom{n}{2}$$

.

Příklad 3

Mějme M-prvkovou množinu a N-prvkou množinu. Najděte vzorec pro počet různých zobrazení *na* z M na N.

Nápověda: Využijte definice z příkladu 2.

Příklad 4

Kolik je podmnožin množiny $\{1\dots n\}$ takových, že v žádné podmnožině nejsou dvě po sobě jdoucí čísla?

Nápověda: Jako mnohdy jindy: zkuste malé případy, tipněte vzorec, dokažte.

Příklad 5*, 3b

Kolik je k-prvkových podmnožin množiny $\{1\dots n\}$ takových, že v žádne z nich nejsou dvě po sobě jdoucí čísla?