

## Cvičení 0

### Příklad 0

Hrajme následující hru s čokoládou. Začneme s jednolitou tabulkou  $m \times n$ . Pak postupně tabulkou lámeme, dokud nezbudou jen délky  $1 \times 1$ . Lámat můžeme jen podle existujícího lomu a jen jednolitý kus čokolády (tedy pokud se nám čokoláda rozpadla na dva kusy, musíme podle toho samého lomu lámat v obou kusech zvlášť). Nalezněte nejmenší počet lámání, pomocí kterých se čokoláda rozláme na kousky  $1 \times 1$ .

**Nápověda:** Nalezněte největší počet těchto lámání. Zkuste si to pro malé čokolády a dokažte hypotézu pro ty velké.

### Příklad 1

Dokažte matematickou indukcí, jaký je počet oblastí, které vymezuje  $n$  přímek v obecné poloze (zádné nejsou rovnoběžné a každé dvě mají unikátní průsečík).

### Příklad 2

Dokažte matematickou indukcí následující (jednoduché) rovnosti:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$$

### Příklad 3

Dokažte, že pro systém všech podmnožin množiny  $X$  (značený  $2^X$ ) platí, že má stejně podmnožin liché velikosti jako sudé velikosti.

### Příklad 4

Mějme mřížku (šachovnici) o velikosti  $2^n \times 2^n$ . Vašim cílem bude pokrýt tuto mřížku políčky tvaru L, tedy čtverci  $2 \times 2$ , kde jedno políčko chybí. Aby to nebylo tak snadné (nebo tak nemožné), jedno políčko na šachovnici je už dopředu vylouplnuto. Ukažte, že je ji nyní možné pokrýt, nezávisle na to, které políčko je vylouplnuto.

### Příklad 5\*, 2b

Mějme mřížku  $3 \times n$ . Kolik existuje cest, tedy posloupností tahů ”nahoru, doprava, dolů, doleva” takových, že každá začíná v levém dolním rohu, končí v pravém horním rohu a každým políčkem prochází právě jednou?

**Nápověda:** Použijte indukci, respektive rekurenci – převod na menší příklad téhož. 1 bod za rekurentní vyjádření vzorce (myšlenku, jak se to počítá) a důkaz správnosti, 2 body za přesný vzorec a důkaz jeho správnosti.