APX. A ONLINE ALGORITMY – DOMÁCÍ ÚKOLY 2

Deadline: pondělí **14. 5. 2018 23:59 AoE**. (AoE znamená *Anywhere on Earth*, tedy kdekoliv na Zemi. Najděte si, kdy to přesně je)

Úkoly odevzdávejte nejlépe elektronicky (ve formátu PDF, ODT, . . . nebo i jen jako text emailu) Martinu Böhmovi na email `bohm+hw2@iuuk.mff.cuni.cz`. Naskenované či kvalitně vyfocené papíry jsou též přijímány, pokud lze vše přečíst bez problémů. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné nebo vám přijde, že v něm něco chybí.

První domácí úkol **[4 body]**

Vytvořte kvadratický program pro Maximální orientovaný řez: Na vstupu dostaneme orientovaný graf $G = (V, \vec{E})$ s nezápornými váhami na hranách a cílem je najít podmnožinu vrcholů S takovou, že $\vec{E}(S, V \setminus S)$ (hrany vedoucí z S do zbytku, ale ne opačné) mají co největší váhu.

Druhý domácí úkol **[4 body]**

Semidefinitní program pro maximální neorientovaný řez (Goemans-Williamson) se zlepší pro některé grafy, pokud přidáme navíc tyto podmínky:

$$\forall i, j, k\colon \|v_i - v_j\|^2 + \|v_j - v_k\|^2 \geq \|v_i - v_k\|^2$$
$$\forall i, j, k\colon \|v_i + v_j\|^2 + \|v_j + v_k\|^2 \geq \|v_i - v_k\|^2$$

1. Převeďte tyto podmínky do podmínek pro semidefinitní program.
2. Ukažte, že celočíselná mezera tohoto programu je 1, pokud se omezíme na množinu všech kružnic $\{C_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Nápověda: Řešte sudé a liché kružnice zvlášť.

Třetí domácí úkol **[4 body]**

Vážené vrch. pokrytí rovinných grafů: Pro zadaný rovinný graf s váhami na vrcholech hledáme množinu vrcholů nejlehčí váhy takovou, že každá hrana má alespoň jeden konec v této množině.

Vaším úkolem je navrhnout 3/2-aproximační algoritmus pro vážené vrcholové pokrytí rovinných grafů.

Poznámka: Může se hodit zopakovat si, co víme o vrcholovém pokrytí z cvičení. Můžete také používat bez důkazu fakta o rovinných grafech (vlastnosti průměrného stupně, Eulerovu formuli, větu o 4 barvách atd).

Čtvrtý domácí úkol **[4 body]**

Stěhovací služba *Chudák a syn* má k dispozici pouze jediné auto. Na vstupu máme metrický prostor s n body, počáteční bod $r \in V$, kapacitu stěhovacího auta C a pak seznam dvojic $(s_i, t_i) \in V^2$. Úkolem je najít nejkratší tah (hrany a vrcholy se mohou opakovat) takový, že auto začíná a končí v r a během své cesty naloží jednu jednotku v každém s_i a vyloží ji v příslušném t_i, aniž by překročilo kapacitu auta C. Auto si může v průběhu cesty dočasně odložit náklad ve vrcholu, kde se zrovna nachází.

1. Nalezněte randomizovaný $O(\log n)$-aproximační algoritmus pro tento problém.
2. Nalezněte 2-aproximační algoritmus, pokud je metrika stromová. *Nápověda:* nalezněte řešení, které navštíví každou hranu nejvýše 2-krát více, než musí.