APX. A ONLINE ALGORITMY – DOMÁCÍ ÚKOLY 1

Deadline: pondělí **2. 4. 2018 23:59 AoE** (AoE znamená *Anywhere on Earth*, tedy kdekoliv na Zemi).

Úkoly odevzdávejte nejlépe elektronicky (ve formátu PDF, ODT, ... nebo i jen jako text emailu) Pavlovi Veselému na email `vesely@iuuk.mff.cuni.cz`. Naskenované či kvalitně vyfocené papíry jsou též přijímány, pokud lze vše přečíst bez problémů. Osobní odevzdání na papíře je možné na začátku cvičení (ne však 3. 4.), nebo když mě zastihnete. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné nebo vám přijde, že v něm něco chybí.

První domácí úkol **[4 body]**

Předpokládejme, že v zesílené definici FPTAS bychom požadovali, aby algoritmus běžel v čase polynomiálním ve velikosti vstupu a v $|\log \varepsilon|$ (namísto $1/\varepsilon$). Co by bylo důsledkem existence takto zesíleného FPTAS?

Druhý domácí úkol **[4 body]**

Najděte polynomiální algoritmus pro největší Celočíselný multikomoditní tok na stromech s jednotkovou kapacitou. Máme tedy daný strom T, jehož každá hrana má kapacitu 1, a k dvojic s_i, t_i. Cílem je najít co největší součet *celočíselných* toků f_i mezi s_i a t_i tak, aby nebyla překročena kapacita hrany (toky f_i tedy budou buď 0 nebo 1).

Hint: dynamické programování. Navíc můžete předpokládat, že umíte vyřešit problém největšího váženého párování v polynomiálním čase.

Třetí domácí úkol **[4 body]**

Máme daný orientovaný graf $F = (V, A)$, v němž hrany mají váhy $w_{ij} \geq 0$, a navíc kořen $r \in V$. Cílem je najít nejlevnější větvení z r, tedy podmnožinu hran F co nejmenší váhy takovou, že pro každé v existuje v F jedna orientovaná cesta z r do v. Pomocí primárně-duální metody vymyslete algoritmus, který najde optimální řešení.

Čtvrtý domácí úkol **[4 body]**

Následující LP má celočíselné optimální řešení pro párování největší váhy v *bipartitních* grafech (to nemusíte dokazovat). Otázkou je, jakého poměru dosahuje pro obecné grafy.

Ukažte, že má celočíselnou mezeru nejvýše 2, tedy konkrétně navrhněte primárně-duální 2-aproximační algoritmus pro obecné grafy. Můžete začít tím, že vhodně zrelaxujete podmínky komplementarity.

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{e \in E} w_e x_e \\
\forall v \in V : &\sum_{e \text{ incidentní } v} x_e \leq 1 \\
&x_e \geq 0
\end{aligned}
$$