9. CVIČENÍ Z APROXIMACÍ

semi-online rozvrhy a online párování

Z minula:

Příklad první Ukážeme, že pravděpodobnostní algoritmus RAND pro stránkování (který vyhodí uniformně náhodnou stránku) je k-kompetitivní. Použijeme následující potenciál:

$$\Phi_i = k(k - x_i)\,,$$

kde x_i je počet stránek, které má v cachi jak RAND, tak optimum (adversary).

a) Jak pomocí potenciálu amortizovat cenu algoritmu? Co chceme ukázat o amortizované ceně pro důkaz k-kompetitivnosti?
b) Při požadavku r analyzujte změnu potenciálu a amortizovanou cenu v jednotlivých případech podle toho, jestli je r v cachi algoritmu či adversaryho.
c) Dokážete najít vstup, na kterém je střední hodnota ceny algoritmu RAND k krát cena optima?

Z přednášky:

Příklad druhý Ukážeme optimální, tedy 1-kompetitivní semi-online algoritmus pro preemptivní rozvrhování na počítačích různých rychlostí (minimalizujeme délku rozvrhu), který zná délku optimálního rozvrhu OPT.

a) Nejprve si připomeňte, jaké podmínky musí splňovat OPT.
b) Algoritmus udržuje *virtuální stroje*, což jsou na počátku skutečné stroje, ale obecně může jít o k sousedních strojů. Algoritmus rozvrhne každou příchozí úlohu v intervalu $[0, \mathrm{OPT}]$ na dvou virtuálních strojích a tyto stroje sloučí do jednoho virtuálního stroje.
Klíčem je ukázat, že pokud nelze úlohu rozvrhnout na žádný virtuální stroj, je porušena jedna z podmínek na OPT a tedy žádný rozvrh délky OPT neexistuje.

A z jiného soudku: Online Bipartitní Párování.

Vstup je bipartitní graf $G = (U, V, E)$, přičemž partita V je známa, ale vrcholy z U přicházejí online po jednom (a nevíme, kolik jich bude). Když přijde vrchol $u \in U$, tak se dozvíme všechny hrany mezi u a V, a můžeme jednu z nich přidat do párování, pokud je její koncový vrchol z V ještě nespárovaný. Hrany přidané do párování však nelze později mazat.

Příklad třetí Navrhněte nějaký jednoduchý deterministický algoritmus a zanalyzujte ho.

Příklad čtvrtý Dále ukažte, že váš jednoduchý algoritmus je nejlepší možný deterministický algoritmus. (Tedy, pokud je opravdu tak dobrý.)

Příklad pátý Pro pravděpodobnostní algoritmy je situace zajímavější. Ukažte, že jednoduchý pravděpodobnostní algoritmus, který spáruje příchozí vrchol s náhodným volným vrcholem na druhé straně, není lepší než nejlepší deterministický algoritmus.

Hint: tentokrát budeme potřebovat velký graf s n vrcholy, který má perfektní párování, tedy optimum je n. Ačkoliv se nám nepodaří donutit jednoduchý pravděpodobnostní algoritmus vytvořit párování s pouze $n/2$ hranami, můžeme zajistit, aby jeho párování mělo ve střední hodnotě velikost $n/2 + \mathcal{O}(\log n)$.