

Jeden obzvláště vypečený příklad z minula!

PŘÍKLAD PRVNÍ Jak je těžký k -MEDIÁN, pokud jsme na stromové metrice? Uvažujme tuto verzi k -MEDIÁNU: máme parametr k a na vstupu metriku (V, d) . Chceme vybrat k -tici bodů M takovou, aby byl co nejmenší součet vzdáleností z každého bodu do pro něj nejbližšího vybraného, čili minimalizujeme $\sum_{v \in V} (\min_{u \in M} d(u, v))$.

Navrhněte algoritmus polynomiální v n i k , když (V, d) je stromová metrika. Zkuste dynamický program; také můžete BÚNO předpokládat, že strom je binární. Člověka jistě napadne to rozdělit na levý a pravý podstrom/podproblém, ale musíme postupovat obezřetně.

Podobně jako na přednášce přepneme na online algoritmy:

PŘÍKLAD DRUHÝ Nejdříve se zaměříme na problém zvaný COW PATH. Představte si, že kráva (nebo robot) došla v mlze k ohradě a chce z ní vylézt. Vlevo nebo vpravo od ní se nachází východ z ohrady, ale kvůli velmi omezené viditelnosti ho nevidí a netuší, jak je daleko. Pomocí jaké strategie má východ hledat, aby nešla moc daleko? Navrhněte deterministickou strategii.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dále se zaměříme na problém PŮJČOVÁNÍ LYŽÍ, který byl zmíněn na přednášce: Představte si, že nemáte lyže, ale chcete lyžovat a budete moct následujících N dní. Nicméně N neznáte. Lyže si buď můžete každý den půjčit za cenu 1, nebo koupit za cenu C (a pak už se nemusí půjčovat, ani kupovat). Každý den ráno se tedy musíte rozhodnout, jestli lyže půjčit, nebo koupit (pokud už je nemáte). Jak to udělat co nejlépe?

- Připomeňte si 2-kompetitivní deterministický algoritmus z přednášky a jeho analýzu.
- Na druhou stranu dokažte, že žádný deterministický algoritmus není lepší než 2-kompetitivní. Co charakterizuje deterministický algoritmus?
- Nyní zkusme pravděpodobnostní algoritmy. Ukažte, že rozhodování dle konstantní pravděpodobnosti (nezávislé na C , třeba 0.5) v každém kole nutně „prohraje“ po prvním kole. (Tedy, kompetitivní poměr bude velký.)
- Dále ukažte, že rozhodováním dle pravděpodobnosti $1/C$ v každém kole získáme lepší než 2-kompetitivní algoritmus.
- Jak zvolit pravděpodobnosti lépe? Nechť p_i je pravděpodobnost, že koupíme lyže i -tý den a ne dřív (tedy $\sum_i p_i = 1$). Zkuste najít nerovnosti, které musí pravděpodobnosti p_i splňovat. Jak pak co nejlépe zvolit tyto pravděpodobnosti?