6. CVIČENÍ Z APROXIMACÍ **dvě SDP, tři metriky**

Kvadratický program:

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot y_i \cdot y_j$$
$$forallk : \sum_{ij} a^k_{ij} \cdot y_i \cdot y_j = b_k$$

Vektorový program (relaxace):

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$
$$\forall k : \sum_{ij} a^k_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = b_k$$
$$\forall i : \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$$

Semidefinitní program (relaxace):

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot x_{ij}$$
$$\forall k : \sum_{ij} a^k_{ij} \cdot x_{ij} = b_k$$
$$\forall i,j : x_{ij} = x_{ji}$$
$$X = (x_{ij}) \succeq 0$$

PŘÍKLAD PRVNÍ V problému UNIVERZÁLNÍHO TSP máme v metrice na vstupu (V, d) najít TSP kružnici, která je dobrá nejen oproti optimu, ale i vůči optimu každé podmnožiny vrcholů. Řešení tohoto problému je permutace π (jako u každého TSP) a hodnota tohoto řešení bude $\max_{U \subseteq V} \frac{d_\pi(U))}{OPT_{TSP}(U)}$, kde $d_\pi(U)$ je délka kružnice jen na vrcholech U určená pořadím π, a $OPT_{TSP}(U)$ je optimální kružnice pouze na U.

Jak dobrý umíme dostat poměr, pokud vstup bude stromová metrika?

PŘÍKLAD DRUHÝ Vytvořte kvadratický program pro problém MAXIMÁLNÍHO k-ŘEZU: Na vstupu máme neorientovaný graf G s váhami na hranách $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem je rozdělit všechny vrcholy grafu do k hromádek $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tak, aby součet vah všech mezihromádkových hran byl co největší možný.

PŘÍKLAD TŘETÍ Ukážeme si, že deterministicky aproximovat metriky moc nelze. Naší metrikou bude kružnice na n vrcholech. Dokažte, že v každé stromové metrice, která ji aproximuje, bude jedna dvojice, která v původní metrice má vzdálenost 1 a v nové alespoň $n-1$.

Jak na to? Uvažujte ze všech optimálních stromových metrik tu, která má součet délek co nejmenší. Jaké má vlastnosti?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Podobně jako lineární programy i semidefinitní programy mají duály. Duál SDP na MAX CUT je:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} + \frac{1}{4} \sum_i \gamma_i$$
$$W + \mathrm{diag}(\gamma) \succeq 0,$$

kde W je symetrická matice vah hran w_{ij} and $\mathrm{diag}(\gamma)$ je diagonální matice s proměnnými γ_i na diagonále. Ukažte, že hodnota přípustného řešení tohoto duálu je horní odhad na váhu jakéhokoliv řezu. Může se vám hodit:

T(Schurova věta o násobení**):** Pro symetrické matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ definujeme matici $A \circ B$ tak, že $(A \circ B)_{ij} = a_{ij} b_{ij}$. Pokud $A \succeq 0$ a $B \succeq 0$, pak $A \circ B \succeq 0$.

Dualizace v plné obecnosti:

Primál:
$$\max C \bullet X$$
$$\text{s.t. } A_i \bullet X = b_i$$
$$X \succeq 0$$

Duál:
$$\min b^T y$$
$$\text{s.t. } \sum_i y_i A_i - C \succeq 0$$

Kdyby se vám duál MAX CUTU moc nelíbil, můžete si udělat vlastní pomocí dualizace výše.

Ještě jeden obzvláště vypečený příklad na druhé straně!

Příklad pátý Jak je těžký k-medián, pokud jsme na stromové metrice? Uvažujme tuto verzi k-mediánu: máme parametr k a na vstupu metriku (V, d). Chceme vybrat k-tici bodů M takovou, aby součet vzdáleností z každého bodu do jeho nejbližšího vybraného byl co nejmenší, čili minimalizujeme $\sum_{v \in V}(\min_{u \in M} d(u, v))$.

Navrhněte algoritmus polynomiální v n i k, když (V, d) je stromová metrika. Zkuste dynamický program; také můžete BÚNO předpokládat, že strom je binární. Člověka jistě napadne to rozdělit na levý a pravý podstrom/podproblém, ale musíme postupovat obezřetně.