5. CVIČENÍ Z APROXIMACÍ

a druhé z es-dé-pé-ček

Kvadratický program:

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot y_i \cdot y_j$$
$$\forall k : \sum_{ij} a_{ij}^k \cdot y_i \cdot y_j = b_k$$

Vektorový program (relaxace):

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$
$$\forall k : \sum_{ij} a_{ij}^k \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = b_k$$
$$\forall i : \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$$

Semidefinitní program (relaxace):

$$\max \sum_{ij} c_{ij} \cdot x_{ij}$$
$$\forall k : \sum_{ij} a_{ij}^k \cdot x_{ij} = b_k$$
$$\forall i, j : x_{ij} = x_{ji}$$
$$X = (x_{ij}) \succeq 0$$

Příklad první Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a vektorový program s n vektory $\mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^n$ (odpovídající vrcholům) a podmínkami, že tyto vektory leží na jednotkové sféře S_{n-1} a pro každou hranu $\{i, j\} \in E$

$$\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^j \leq -\frac{1}{k-1} .$$

Ukažte, že tento vektorový program je relaxací k-barvení, tedy že pro každý k-obarvitelný graf existuje přípustné řešení.

Hint: Uvažte následujících k vektorů v $\mathbb{R}^n$: Vektor $\mathbf{u}^a$ pro $a \leq k$ má 0 na posledních $n-k$ souřadnicích, $-\sqrt{(k-1)/k}$ na souřadnici a a na zbylých souřadnicích $1/\sqrt{k(k-1)}$.

Příklad druhý Mějme graf G s n vrcholy a dvěma váhami na hranách, tedy máme $\alpha_e \leq \beta_e$ pro každou hranu $e \in E$. Chtěli bychom vědět, jestli se dá graf vnořit do $\mathbb{R}^n$ tak, že kvadrát vzdálenosti koncových vrcholů jakékoliv hrany je mezi těmito váhami. Přesněji, chceme najít body $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\alpha_{i,j} \leq \|p_i - p_j\|^2 \leq \beta_{i,j} \text{ pro každé } \{i, j\} \in E .$$

Zformulujte tento problém jako semidefinitní program.

Příklad třetí Zaměříme se na problém Max 2-SAT, v němž máme množinu klauzulí s nejvýše dvěma literály a cílem je najít ohodnocení proměnných takové, že je splněno co nejvíce klauzulí.

a) Nejprve vytvořte kvadratický program. *Hint:* Může se hodit mít proměnnou $y_0 \in \{-1, 1\}$, která udává, jestli hodnota true je -1, nebo 1.
b) Zrelaxujte kvadratický program na vektorový program, který následně použijte na vytvoření podobného algoritmu jako pro Max Cut na přednášce.
c) Ukažte, že algoritmus má stejný aproximační poměr jako ten pro Max Cut, tedy

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{\theta}{1 - \cos\theta} > 0.87856 .$$

Kromě nerovnosti vyplývající z definice α můžete použít následující nerovnost (umíte ji dokázat s použitím definice α?):

$$1 - \frac{\theta}{\pi} \geq \frac{\alpha}{2}(1 + \cos\theta) .$$

Příklad čtvrtý Vytvořte kvadratický program pro problém Maximálního k-řezu: Na vstupu máme neorientovaný graf G s váhami na hranách $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem je rozdělit všechny vrcholy grafu do k hromádek $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tak, aby součet vah všech mezihromádkových hran byl co největší možný.

Příklad pátý Podobně jako lineární programy i semidefinitní programy mají duály. Duál SDP na Max Cut je:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} + \frac{1}{4} \sum_i \gamma_i$$
$$W + \mathrm{diag}(\gamma) \succeq 0,$$

kde W je symetrická matice vah hran w_{ij} and $\mathrm{diag}(\gamma)$ je diagonální matice s proměnnými γ_i na diagonále. Ukažte, že hodnota přípustného řešení tohoto duálu je horní odhad na váhu jakéhokoliv řezu.

Může se vám hodit následující věta:

T:(Schurova věta o násobení) Pro symetrické matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ definujeme matici $A \circ B$ tak, že $(A \circ B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Pokud $A \succeq 0$ a $B \succeq 0$, pak $A \circ B \succeq 0$.