3. CVIČENÍ Z APROXIMACÍ

primárně-duální algoritmy

Připomenutí z minula:

T(Aproximační varianta komplementarity**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\min c^T x, Ax \geq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\max b^T y, A^T y \leq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primáru a duálu (x', y'). Pokud platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\colon x'_i = 0 \quad \vee \quad c_i/\alpha \leq \sum_j a_{ij} y'_j \leq c_i,$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}\colon y'_j = 0 \quad \vee \quad b_j \leq \sum_i a_{ij} x'_i \leq \beta b_j,$$

pak je naše řešení x' $\alpha\beta$-aproximací optimálního řešení problému.

Typické schéma *primárně-duálních algoritmů* pro minimalizační problém:

1. Začněme s dvojicí řešení (P, D), kde P je nepřípustné řešení primáru a D je přípustné řešení duálu. Obvykle začínáme s $(\vec{0}, \vec{0})$.
2. Vyberme si nějakou podmnožinu proměnných duálu – libovolně, hladově nebo nějak chytře – a zvyšujme je, dokud se nějaká podmínka duálu nestane těsnou.
3. Těsnost duální podmínky v komplementaritě znamenala, že hodnota přidružené proměnné primáru může být nenulová. Tohoto principu se tedy budeme držet a zvýšíme příslušnou proměnnou na nějakou (celočíselnou) hodnotu.
4. Vybereme další podmnožinu proměnných a pokračujeme stejně.
5. Skončíme, až se P stane přípustným řešením.

Příklad první Ukažte, že primárně-duální algoritmus pro zobecněný Steinerův strom z přednášky je nejlepší možný vůči použité lineární relaxaci. Jinými slovy, najděte rodinu instancí, pro které poměr celočíselného optima a optima relaxace konverguje ke dvoum.

To ukazuje, že *celočíselná mezera*, tedy poměr celočíselného optima a optima relaxace v nejhorším případě, je rovna dvoum.

Příklad druhý Multiřez na stromě: Mějme strom T, jehož hrany mají nezápornou kapacitu $c_e \geq 0$, a k dvojic vrcholů s_i, t_i. Cílem je najít množinu hran F co nejmenší celkové kapacity takovou, že po odebrání hran v F nebude žádná dvojice vrcholů spojena hranou.

a) Zformulujte primární CLP pro tento problém, zrelaxujte ho a zdualizujte. Jaký je význam duálu?
b) Jak zrelaxovat podmínky komplementarity, aby při jejich splnění byl aproximační poměr 2?
c) Poté navrhneme primárně-duální 2-aproximační algoritmus.

Příklad třetí Zaměříme se na následující variantu problému batohu: Máme opět věci s váhou v_i a cenou c_i, navíc dostaneme požadavek D a chceme najít podmnožinu S položek co nejmenší celkové váhy, aby součet cen věcí v S byl alespoň D (tedy co nejmenší nosnost batohu, do kterého se vejdou věci celkové ceny alespoň D).

a) Zformulujte celočíselný program pro tento problém a zrelaxujte ho. Zamyslete se, jestli se hodí pro návrh primárně-duálního algoritmu.
b) Poté najděte instanci s velkou celočíselnou mezerou.
c) Upravte LP přidáním dalších nerovností, aby tato instance již neměla velmi malé neceločíselné řešení.
d) Poté navrhněte primárně-duální algoritmus pro upravené LP a určete jeho aproximační poměr.