2. CVIČENÍ Z APROXIMACÍ

opakování lineárního programování

Příklad první Zformulujte celočíselný lineární program pro Váženě vrcholové pokrytí a popište, jak snadno získat 2-aproximační algoritmus pro tento problém.

Příklad druhý Poměrně zajímavé pozorování o Váženém vrcholovém pokrytí: když si vezmete vrchol optimálního řešení pro jeho lineární relaxaci, tak je *poloceločíselný* – každá hodnota proměnné x_e je buď $0, 1$ nebo $1/2$.

Zkuste tento fakt dokázat.

Připomenutí z optimalizací:

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volností* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' rozumíme hodnotu $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\min c^T x, Ax \geq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\max b^T y, A^T y \leq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x', y'). Pak platí následující věta:

Dvojice (x', y') je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x'_i \cdot s_i^{(D)} = 0,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y'_j = 0.$$

Příklad třetí Ukažte, že platí tato aproximační varianta komplementarity:

Mějme dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x', y'). Pokud platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x'_i = 0 \quad \vee \quad c_i/\alpha \leq \sum_j a_{ij}y'_j \leq c_i,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon y'_j = 0 \quad \vee \quad b_j \leq \sum_i a_{ij}x'_i \leq \beta b_j,$$

pak je naše řešení x' $\alpha\beta$-aproximací optimálního řešení problému.

Zbytek cvičení si budeme opakovat *primárně-duální algoritmy.* Jejich princip pro minimalizační problém se dá popsat takto:

1. Začněme s dvojicí řešení (P, D), kde P je nepřípustné řešení primáru a D je přípustné řešení duálu. Obvykle začínáme s $(\vec{0}, \vec{0})$.

2. Vyberme si nějakou podmnožinu proměnných duálu – libovolně, hladově nebo nějak chytře – a zvyšujme je, dokud se nějaká podmínka duálu nestane těsnou.
3. Těsnost duální podmínky v komplementaritě znamenala, že hodnota přidružené proměnné primáru může být nenulová. Tohoto principu se tedy budeme držet a zvýšíme příslušnou proměnnou na nějakou (celočíselnou) hodnotu.
4. Vybereme další podmnožinu proměnných a pokračujeme stejně.
5. Skončíme, až se P stane přípustným řešením.

Příklad čtvrtý Kdybychom tedy chtěli napsat primárně-duální aproximační algoritmus pro Vážené vrcholové pokrytí, mohl by fungovat třeba ten nejjednodušší:

1. Začněme s $(0, 0)$.
2. Vyberme si libovolnou proměnnou duálu a zvyšujme ji, dokud se nějaká podmínka nestane těsnou.
3. Zvolme tuto podmínku (kdyby jich bylo více, volíme libovolně) a nastavme hodnotu přidružené primární proměnné na 1.

Dokažte, že nám toto řešení dá 2-aproximaci.

Příklad pátý Problém Váženého množinového pokrytí je zadán takto: na vstupu máte systém množin $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, kde všechny S_i jsou podmnožiny $\{1, \ldots, n\}$, a ke každé množině S_i máme její cenu c_i. Za úkol máme najít nejlevnější soubor množin takový, že ve sjednocení pokrývají celou nosnou množinu $\{1, \ldots, n\}$.

Zformulujte celočíselný lineární program pro tento problém a pak zformulujte i duál jeho lineární relaxace.

Příklad šestý Vymyslete a zanalyzujte primárně-duální aproximační algoritmus pro Vážené množinové pokrytí, který dosáhne f-aproximace, kde $f = \max_j |\{S_i | j \in S_i\}|$.

(Nejspíš znáte také způsob, jak dostat f-aproximaci pomocí zaokrouhlování primáru.)

Příklad sedmý Abychom nedělali jen opakování Úvodu z aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů, zkusme si vyřešit jeden příklad (z knížky Williamson, Shmoys), který možná neznáte:

Budeme se zabývat problémem Minimum Feedback Vertex Set, který hledá podmnožinu vrcholů nejmenší váhy takovou, že po jejím odebrání bude graf acyklický.

1. Zformulujte celočíselnou $\{0, 1\}$-lineární formulaci + duál.
2. Zkuste provést úplně stejnou analýzu, jakou jsme dělali pro Vážené vrcholové pokrytí. Dostanete f-aproximační algoritmus? A co bude f v našem problému?
3. Abychom dostali lepší, než f-aproximační algoritmus, zkusíme chytře zvolit duální proměnnou, kterou budeme zvyšovat. Vymyslete, jak to dělat. Poradím, že naším cílem je získat $O(\log n)$-aproximační algoritmus.
   Nápověda: Zkuste nejdřív předpokládat, že minimální stupeň grafu je 3. Umíte najít nějakou vhodnou první duální proměnnou v takovém grafu?