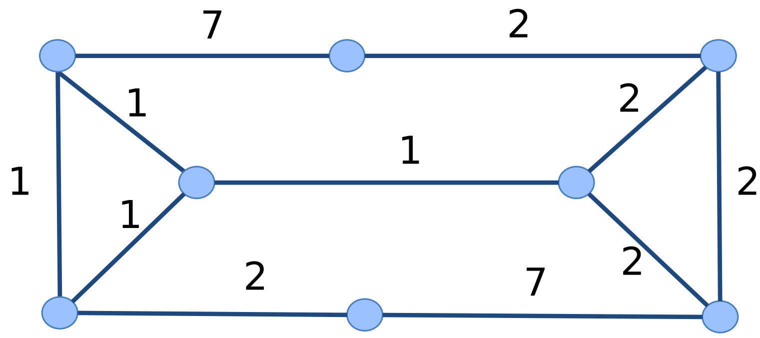
2. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

obchodní cestující

Příklad první Uvažte ohodnocený graf zadaný níže:



1. Jaká je nejkratší Hamiltonovská kružnice v tomto grafu?
2. Jaké je optimální řešení TSP na tomto grafu?
3. Jaké řešení nalezne nějaký běh Christofidesova algoritmu?

Příklad druhý Nalezněte třídu grafů, která dokazuje, že algoritmus pro metrické TSP používající obcházení minimální kostry (a zkratkování) není lepší než 2-aproximační.

V tomto příkladě hledáme třídu grafů, která je nekonečná a má ostře rostoucí počet vrcholů, čili $\{G_i | i \in \mathbb{N}\}$ taková, že $\forall i \in \mathbb{N}$: $|V(G_{i+1})| > |V(G_i)|$. To je rozumný požadavek; přece jen, pokud by tvrzení platilo jen pro grafy do 20 vrcholů a dále už by algoritmus byl 1.25-aproximační, tak bychom o něm řekli, že je *asymptoticky* 1.25-aproximační.

V tomto příkladu stačí nepřesné počty, tj. můžete ukázat, že kostrový algoritmus na grafu G_i není lepší než $(2 - x_i)$-aproximační, kde $x_i \to 0$. Čili pokud „bude jasně vidět“, že se poměr blíží k 2 v limitě, tak to stačí.

Příklad třetí Je TSP rešitelné v pseudopolynomiálním, nebo možná polynomiálním čase? Nabízí se následující algoritmus využívající dynamické programování:

1. Vytvoř tabulku $d[i, x, y]$, kde význam políčka bude „délka cesty mezi x a y v i krocích“.
2. Nastav $d[0, x, x] = 0$ a $d[0, x, y] = \infty$.
3. Nyní pro každou délku $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$:
4. a pro každou dvojici vrcholů a, b:
5. Projdi sousedy a nastav $d[i, a, b] = \min_{e|e \text{ hrana spojující } a \text{ s } x}(d(e) + d[i-1, x, b])$.
6. Nastav $d[i, b, a] = d[i, a, b]$.
7. Az výpočet skončí, vrať jako délku TSP nejmenší hodnotu $d[n, v, v]$ přes všechny v.

Zanalyzujte tento algoritmus.

Příklad čtvrtý Mějme souvislý graf G. Problém obchodního cestujíciho je těžký, ale můžeme hledat nejkratší obecnější strukturu – podgraf $P \subseteq G$ takový, že P obsahuje všechny vrcholy a všechny stupně v P jsou rovny 2. Tomuto problému se říká Minimalní pokrytí kružnicemi.

Hint: Znám alespoň dva způsoby, jak na to jít:

- *Od Kbelnice:* Pokud jste chodili na Optimalizační metody a přátelíte se i s takovými pojmy jako totálni unimodularita, tak toto je přímá cesta.
- *Od Kopidlna:* Pokud lineární programovaní ještě neovládáte, tak můžete zkusit cestu od Kopidlna, kde to vubec potřeba není. Připomenu jenom, že nalézt perfektní párování minimální váhy lze v polynomiálním čase.

Příklad pátý Asymetrické TSP je problém nalezení minimálního TSP na orientovaném grafu, kde nemusí platit symetrie hran (ale trojúhelníková nerovnost ano).

1. Nejprve dokažte, že najít optimum asymetrického TSP jde pomoci symetrického TSP a naopak – takže tyhle dva problémy jsou stejně těžké.
2. A potom dokažte, že rozhodně stejně těžké nejsou – kupříkladu kostrový 2-aproximační algoritmus pro symetrické TSP vůbec nedává smysl pro asymetrické TSP.