# ÚVOD DO APROXIMACÍ – DÚ1

TSP a spol.

Každá úloha je za dva body. Deadline: **16. 11. 2016 23:59** přes email. Prosím pošlete úkol ve formátu PDF. Skeny s dobrou čitelností (spolu s rukopisem s dobrou čitelností) jsou v pořádku. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné.

PŘÍKLAD PRVNÍ V problému Steinerova stromu je dán souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$, ceny hran $c : E \to \mathbb{R}^+$ a množina terminálů $S \subseteq V$. Přípustným řešením je podmnožina hran $E' \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E')$ má všechny terminály v jedné komponentě. Cílem je najít co nejlevnější takovou, čili $\min \sum_{e \in E'} c(e)$. Vaším úkolem je nalézt 2-aproximační algoritmus.

*Nápověda:* Když graf splňuje trojúhelníkovou nerovnost, řešení by mělo být jednoduché. Pro obecnou variantu se inspirujte technikami z problému obchodního cestujícího.

PŘÍKLAD DRUHÝ V problému MaxSat máme zadanou Boolovskou formuli v CNF formě s klauzulemi různých velikostí, a máme za úkol najít přiřazení, které splní co největší množství klauzulí, i když formule jako celek může být nesplnitelná.

Budeme se zabývat následujícím algoritmem:

„Nastavíme nejprve všechny proměnné na 0 a podíváme se, kolik klauzulí jsme splnili. Pak zkusíme nastavit všechny proměnné na 1 a spočítat, kolik klauzulí je splněno. Vezmeme lepší z těchto přiřazení a to vrátíme jako naši aproximaci.“

1. Pečlivě zanalyzujte tento aproximační algoritmus a spočtěte jeho přesný poměr, tzn. dokažte, že je to $r$-aproximační algoritmus a k tomu také dokažte, že to není $r'$-aproximační algoritmus pro $r' < r$.
2. Uvažte libovolný *konstantu přiřazení zkoušející* algoritmus – takový algoritmus zkusí to samé, co algoritmus výše, ale místo dvou přiřazení vybere to nejlepší z $c$ předvybraných přiřazení, kde ani $c$, ani přiřazení nemohou záviset na vstupu. (Tady přiřazením rozumíme nekonečnou posloupnost nul a jedniček, kde $x_1$ přiřadíme první číslici, $x_2$ druhou číslici a tak dále, než dojdou proměnné.)
   Jaký je těsný aproximační poměr těchto konstantu přiřazení zkoušejících algoritmů? Opět byste měli najít číslo $r_2$ takové, že umíte dokázat, že některý algoritmus je $r_2$-aproximační, ale *žádný* konstantu přiřazení zkoušející algoritmus není ostře lepší než $r_2$-aproximační.

PŘÍKLAD TŘETÍ Navrhněte a zanalyzujte polynomiální algoritmus pro následující problém: na vstupu máme orientovaný graf $\vec{G}$ a vzdálenostní funkci $d\colon \vec{E} \to \mathbb{R}^+$. Naším úkolem je nalézt nejkratší průměrnou orientovanou kružnici, což bude kružnice minimalizující hodnotu $\frac{\sum_{\vec{e} \in \vec{C}} d(\vec{e})}{|\vec{C}|}$.

Všimněte si, že celkově nejkratší kružnice vůbec nemusí být rovna nejkratší průměrné kružnici (ta může být delší v počtu hran i délce).

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Předpokládejme, že existuje polynomiální algoritmus pro hledání nejkratší průměrné orientované kružnice (zadání viz výše).

Uvažte následující algoritmus pro asymetrické TSP na $n$ vrcholech, které máme zadané pomocí asymetrické funkce $d\colon \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}^+$ splňující trojúhelníkovou nerovnost:

1. Nalezneme v metrice orientovanou kružnici $\vec{C}$ minimalizující $\frac{\sum_{\vec{e} \in \vec{C}} d(\vec{e})}{|\vec{C}|}$.
2. Hrany kružnice $\vec{E}(\vec{C})$ přidáme do řešení.
3. Odstraníme všechny vrcholy $\vec{C}$ až na jeden. Pokračujeme rekurzivně na zbytek grafu/metriky, dokud zbývá alespoň jeden vrchol.

4. Použijeme zkratkování a z Eulerovského tahu vytvoříme orientovanou Hamiltonovskou kružnici.

Dokažte, že tento algoritmus je $\mathcal{O}(\log n)$-aproximace pro asymetrické TSP.

## Bonusový příklad

Z přednášky víme, že pro Christofidesův algoritmus platí, že $\mathrm{ALG} \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}$, kde ALG je velikost řešení algoritmu a OPT je velikost optimálního (minimálního) řešení.

Osvěžme si lineární programování a dokažme pomocí něj, že pro Christofidesův algoritmus platí, že $\mathrm{ALG} \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$, kde $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$ je optimální hodnota této lineární relaxace:

$$
\begin{aligned}
(P):& \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\forall v \in V:& \qquad \sum_{e=vx} x_e = 2 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset:& \qquad \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} x_e \geq 2 \\
\forall e \in E:& \qquad 0 \leq x_e \leq 1
\end{aligned}
$$

Plán boje je takovýto:

1. Nejprve se utvrďte v tom, že $\mathrm{ALG} \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$ implikuje původní výsledek $\mathrm{ALG} \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}$.
2. Pak dokažte, že pro optimální řešení $x^*$ lineárního programu $(P)$ (to je to řešení, které má hodnotu $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$) platí, že $\frac{n-1}{n}x^*$ je bod ležíci uvnitř mnohostěnu minimální kostry pro ten samý graf.
3. Nyní použijte bod 2 a dokončete důkaz, že $\mathrm{ALG} \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$.

Pro připomenutí, *kostrový mnohostěn* chápeme jako mnohostěn určený těmito lineárními podmínkami:

$$
\begin{aligned}
& \qquad \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset:& \qquad \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} x_e \geq 1 \\
\forall e \in E:& \qquad x_e \geq 0
\end{aligned}
$$

*Mnohostěn párování* vypadá takto:

$$
\begin{aligned}
\forall v \in V:& \qquad \sum_{e=vx} x_e \leq 1 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset, |S| \text{ liché velikosti}:& \qquad \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} x_e \geq 1 \\
\forall e \in E:& \qquad x_e \geq 0
\end{aligned}
$$