PŘÍKLAD PRVNÍ Nyní uvažme problém MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ – na vstupu dostaneme orientovaný graf $G = (V, \vec{E})$ s nezápornými vahami na hranách, a našim cílem je najít podmnožinu vrcholů S takovou, že $\vec{E}(S, V \setminus S)$ (hrany vedoucí z S do zbytku, ale ne opačné) mají co největší váhu.

Navrhněte pravděpodobnostní $\frac{1}{4}$-aproximační algoritmus pro MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ.

PŘÍKLAD DRUHÝ Zkusme vymyslet lepší algoritmus pro MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ:

1. Navrhněte $\{0,1\}-$celočíselný program, který řeší MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ.
2. Vyberme každý vrchol v_i s pravděpodobností $1/4 + x_i^*/2$, kde x_i^* je optimální řešení lineární relaxace celočíselného programu z podbodu 1. Dostaneme s toutou volbou 1/2-aproximaci?

PŘÍKLAD TŘETÍ

Vymyslete kombinatorickou analýzu pro hladový algoritmus pro VÁŽENÉ MNOŽINOVÉ POKRYTÍ.

Tipy:

- Kdykoli hladový algoritmus zvolí množinu S_i, která pokrývá nově elementy $X_i \subseteq S_i$, rozpočtěte cenu S_i rovnoměrně novým elementům takto: $c(u) = w(S_i)/|X_i|$.
- Potom vymyslete, jak odhadnout zeshora $\sum_{u \in S} c(u)$ pro *libovolnou* S, a nakonec použijte tento odhad pro takové množiny S, které zvolí optimum.
- Kdybych nadefinoval $a_i = |S \cap X_i|$, proč platí $\frac{w(S)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} \geq w(S_1)/|X_1|$?
- A proč platí $\frac{w(S)}{a_2 + \ldots + a_k} \geq w(S_2)/|X_2|$?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Než si zadáme úlohu, zadefinujme si grafový parametr *zlomková barevnost*:

Pro neorientovaný, nevážený graf G nejprve uvážíme $\chi_m(G)$, což je minimální číslo m takové, že existuje m nezávislých množin, které pokrývají všechny vrcholy grafu. (To je jen převyprávěná barevnost $\chi(G)$.)

Náš parametr *zlomková barevnost*, to jest $\chi_f(G)$, bude roven optimu lineární relaxace pro $\chi_m(G)$.

Naše úkoly jsou tři:

1. Zformulujte $\{0,1\}-$celočiselný lineární program počítající $\chi_m(G)$, abychom věděli, o jakém parametru χ_f se bavíme.
2. Dokažte, že $\chi_f(G) \cdot \mathcal{O}(\log(n)) \geq \chi(G)$. (Souvisí χ_f s množinovým pokrytím?)
3. Zlomková barevnost $\chi_f(G)$ je definovaná lineárním programem. Takže jde spočítat v polynomiálním čase, nebo ne? Zdůvodněte.

PŘÍKLAD PÁTÝ Další ze zajímavých metrických problémů je PROBLÉM k CENTER, kde na vstupu je množina $V, |V| = n$ bodů v metrice a my (i optimum) vybíráme k center (k-prvkovou podmnožinu z n bodů) tak, aby body byly co nejblíže centrům – aby ten nejvzdálenější bod od všech středisek byl co nejblíže. Formálně minimalizujeme funkci $u(S) = \max_{p \in V} d(p, S)$, kde $d(p, S)$ je vzdálenost mezi p a nejbližším z S.

Navrhněte a zanalyzujte 2-aproximační algoritmus pro PROBLÉM k CENTER.

Tip: Pozor, náš algoritmus i optimum zvolí právě k bodů, aproximační poměr ovlivní jen povolenou chybu vzdálenosti. V analýze se k bodů optima nějak musí projevit – dává tedy smysl začít tak, že uvažujete optimální výběr k bodů a srovnáváte ji s vašim výběrem.