3. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ **mráz, hlad, řez, SAT**

PŘÍKLAD PRVNÍ Mějme klasický NP-těžký PROBLÉM BATOHU, to jest n objektů $a_1, \ldots, a_n$, kde každý objekt a_i má váhu w_i a cenu c_i, a my máme batoh o nosnosti B.

Navrhněte hladový 2-aproximační algoritmus pro tento problém. (Existují i o dost lepší nehladové aproximační algoritmy.)

PŘÍKLAD DRUHÝ Uvažujme ROZVRHOVÁNÍ SE ZÁVISLOSTMI: rozvrhujeme úlohy různých délek na m počítačů (m součástí vstupu), ale navíc máme závislosti mezi úlohami. Přesněji, na úlohách je definovaný acyklický graf a úlohu je možné zahájit až ve chvíli, kdy jsou všechny úlohy jí předcházející v grafu dokončeny. Navrhněte hladový algoritmus a dokažte, že je 2-aproximační.

PŘÍKLAD TŘETÍ Na minulém cvičení jsme formulovali pravděpodobnostní aproximační algoritmus pro MAX SAT, který byl efektivní pro klauzule délky 2 a delší, ale byl jen 1/2-aproximační v instancích, které obsahovaly mnoho klauzulí (x_i) nebo $(\neg x_j)$.

Pojďme nahlédnout, že můžeme předpokládat trochu hezčí vstup:

1. Dokažte, že máme-li c-aproximační algoritmus pro MAX SAT na vstupech, které neobsahují negativní jednoklauzule $(\neg x_i)$, tak ho umíme přetvořit na c-aproximační algoritmus pro MAX SAT s všemi přípustnými vstupy.
2. Dokažte, že stejný převod platí i pro VÁŽENÝ MAX SAT, kde každá klauzule má váhu w_i a my maximalizujeme vážený součet splněných klauzulí $\max \sum_i w_i C_i$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Z předchozího cvičení víme, že nyní řešíme MAX SAT na vstupech, které neobsahují negativní jednoklauzule $(\neg x_i)$. To by nám mohlo pomoci v lepším nastavení pravděpodobnosti p tak, aby se zvýšila pravděpodobnost splnění klauzule:

1. Dokažte, že pokud x_i je nastavena nezávisle náhodně s pravděpodobností $p > \frac{1}{2}$, tak pravděpodobnost splnění libovolné klazule obsahující literál x_i je alespoň $\min(p, 1-p^2)$.
2. Zvolte vhodné p a dokončete analýzu naznačeného pravděpodobnostního algoritmu pro MAX SAT.

PŘÍKLAD PÁTÝ Nyní uvažme problém MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ – na vstupu dostaneme orientovaný graf $G = (V, \vec{E})$ s nezápornými vahami na hranách, a našim cílem je najít podmnožinu vrcholů S takovou, že $\vec{E}(S, V \setminus S)$ (hrany vedoucí z S do zbytku, ale ne opačné) mají co největší váhu.

Navrhněte pravděpodobnostní $\frac{1}{4}$-aproximační algoritmus pro MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Zkusme vymyslet lepší algoritmus pro MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ:

1. Navrhněte $\{0,1\}-$celočíselný program, který řeší MAX ORIENTOVANÝ ŘEZ.
2. Vyberme každý vrchol v_i s pravděpodobností $1/4 + x_i^*/2$, kde x_i^* je optimální řešení lineární relaxace celočíselného programu z podbodu 1. Dostaneme s toutou volbou 1/2-aproximaci?

PŘÍKLAD SEDMÝ Na dnešní přednášce byl ukázán $(1-1/e)$-aproximační algoritmus pro MAX SAT založený na lineárním programování a na náhodném nastavení proměnných podle jeho optimálních hodnot y^* – jmenovitě, nastavili jsme $x_i = 1$ s pravděpodobností y_i^*.

Možná vás napadla otázka, proč zrovna y_i^* – je vidět, že zvolit přímo souřadnici v optimálním LP řešení je dobrá volba? Proč nepoužít raději $f(y_i^*)$ pro nějakou chytrou funkci f? Dokažte následující tvrzení:

Nechť $f\colon [0,1] \to [0,1]$ je libovolná funkce, pro kterou platí $1 - 4^{-x} \leq f(x) \leq 4^{x-1}$. Potom náhodné zaokrouhlování MAX SAT pomocí funkce f je $\frac{3}{4}$-aproximační algoritmus.