1. DÚ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

TSP a spol.

Každý příklad je za dva body. Termín: **10. 11. 2015 17:19.** Řešení odevzdávejte emailem nebo osobně na cvičení.

Příklad první

1. Nalezněte třídu grafů, která dokazuje, že algoritmus pro metrický TSP používající obcházení minimální kostry není lepší než 2-aproximační.
2. Nalezněte třídu grafů, která dokazuje, že Christofidesův algoritmus pro metrický TSP není lepší než 3/2-aproximační.

V obou případech hledáme třídy grafů, které jsou nekonečné a mají ostře rostoucí počet vrcholů, čili $\{G_i | i \in \mathbb{N}\}$ takové, že $\forall i \in \mathbb{N}\colon |V(G_{i+1})| > |V(G_i)|$. To je rozumný požadavek; přece jen, pokud by tvrzení platilo jen pro grafy do 20 vrcholů a dále už by algoritmus byl 1.25-aproximační, tak bychom o něm řekli, že je *asymptoticky* 1.25-aproximační.

V tomto příkladu stačí nepřesné počty, tj. můžete ukázat, že Christofidesův algoritmus na grafu G_i není lepší než $(3/2 - x_i)$-aproximační, kde $x_i \to 0$. Čili pokud „bude jasně vidět“, že se poměr blíží k 3/2 v limitě, tak to stačí.

Příklad druhý

Uvažte následující algoritmus pro asymetrické TSP s délkovou funkcí $d\colon \vec{E} \to \mathbb{R}^+$:

1. Nalezneme orientovaný cyklus $\vec{C}$ v $\vec{G}$, který minimalizuje $\frac{\sum_{\vec{e} \in \vec{C}} d(\vec{e})}{|\vec{C}|}$.
2. Vložíme hrany $\vec{E}(\vec{C})$ do řešení.
3. Z grafu smažeme všechny vrcholy z $\vec{C}$ až na jeden a pokračujeme rekurzivně, dokud z $\vec{G}$ nezbývá už jen jediný vrchol.

Vaším úkolem je:

- Popište, jak v kroku 1 vybrat $\vec{C}$ v polynomiálním čase.
- Dokažte, že tento algoritmus je $\mathcal{O}(\log n)$-aproximační algoritmus pro asymetrické TSP.

Příklad třetí

V problému Steinerova stromu je dán souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$, ceny hran $c : E \to \mathbb{R}^+$ a množina terminálů $S \subseteq V$. Přípustným řešením je podmnožina hran $E' \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E')$ má všechny terminály v jedné komponentě. Cílem je najít co nejlevnější takovou, čili $\min \sum_{e \in E'} c(e)$. Vaším úkolem je nalézt 2-aproximační algoritmus.

Nápověda: Když graf splňuje trojúhelníkovou nerovnost, řešení by mělo být jednoduché. Pro obecnou variantu se inspirujte technikami z problému obchodního cestujícího.

Příklad čtvrtý

Uvažujme kubický, hranově 2-souvislý graf G. (*Kubický* znamená, že graf má všechny stupně rovny 3, a *hranově 2-souvislý* znamená, že neobsahuje most, čili hranu, po jejímž smazání se stane nesouvislým.) Graf není ohodnocený, čili všechny hrany mají délku jedna.

1. Dokažte, že takovýto graf má TSP sled délky nejvýše $4|E|/3$.
2. Dokažte, že když uvážíme mnohostěn perfektních párování, tak bod $(1/3, 1/3, 1/3, \ldots, 1/3)$ vždy leží v mnohostěnu.
3. Dokažte, že v G existuje množina perfektních párování $M_1, \ldots M_k$ a konstanty $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ takové, že když vyberu jedno párování M_i náhodně s pravděpodobností λ_i, tak pro *každou hranu e v celé* $E(G)$ platí, že $P[e \in M_i] = 1/3$.

Mnohostěn perfektních párování vypadá takto:

$$\begin{aligned} &\forall v \in V: & \sum_{e=vx} x_e &= 1 \\ &\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset, |S| \text{ liché velikosti}: & \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} x_e &\geq 1 \\ &\forall e \in E: & x_e &\geq 0 \end{aligned}$$