1. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

poznáváme aproximace, TSP

Příklad první V následujících případech rozhodněte, jde-li o aproximační algoritmus, a pokud ano, odhadněte jeho aproximační poměr (bez důkazu). Ty problémy, které si možná tolik nepamatujete, jsou definovány níže.

1. **Maximální klika v grafu:** Pro každou hranu $e \in E(G)$ hladově vyzkouším, jestli k ní existuje třetí vrchol, se kterým tvoří trojúhelník. Pokud ano, budu hledat čtvrtý vrchol, který s těmito třemi tvoří K_4. Pokračuju, dokud nenajdu co největší kliku. Vrátím na výstupu tu největší z klik, kterou jsem našel.
2. **Minimální vrcholové pokrytí v bipartitním grafu:** Naleznu maximální párování v bipartitním grafu. Pak přidám do vrcholového pokrytí z každé dvojice párovacích hran ten vrchol, který má větší stupeň (to abych pokryl víc hran). Vrátím vybrané vrcholy jako vrcholové pokrytí.
3. **Minimální vrcholové pokrytí**: Najdu optimální řešení lineární relaxace celočíselného programu pro minimální vrcholové pokrytí. To je následující program:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{v \in V} x_v \\
\forall uv \in E: \quad & x_u + x_v \geq 1 \\
\forall v \in V: \quad & x_v \geq 0
\end{aligned}
$$

   Pak každou proměnnou x_i, která je větší nebo rovna $1/2$, zaokrouhlím na 1. Vrátím proměnné s hodnotou 1.
4. **Minimální dominujíci množina:** Najdu optimální řešení lineární relaxace celočíselného programu pro min. dominující množinu, čili najdu optimální řešení tohoto LP:

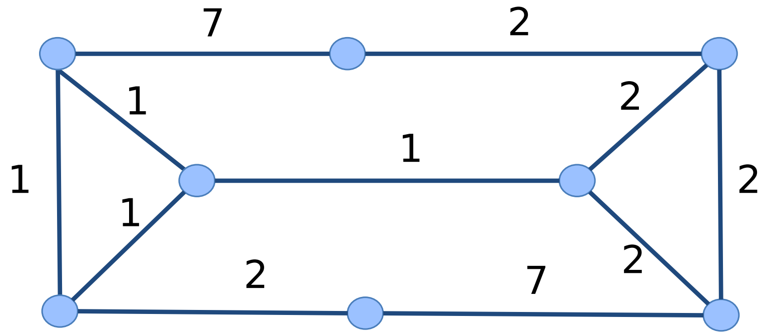
$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{v \in V} x_v \\
\forall v \in V: \quad & x_v + \left(\sum_{vw \in E} x_w \right) \geq 1 \\
\forall v \in V: \quad & x_v \geq 0
\end{aligned}
$$

   Pak každou proměnnou x_i, která je větší nebo rovna $1/2$, zaokrouhlím na 1. Vrátím na výstupu proměnné s hodnotou 1.
5. **Problém batohu (maximalizace počtu objektů v batohu) s racionálními vahami předmětů:** Vynásobím nejmenším společným násobkem, vyřeším dynamickým programováním, vrátím výsledek dynamického programu.

- Vrcholové pokrytí je množina vrcholů taková, že každá hrana grafu je pokrytá, čili alespoň jeden její konec je v pokrytí. Hledáme vrcholové pokrytí minimální co do počtu vrcholů, občas je i vážené.
- Dominující množina je množina vrcholů taková, že každý vrchol grafu je buď uvnitř dominující množiny, nebo v dominující množině má alespoň jednoho souseda. Všimněte si rozdílu mezi

dominující množinou a vrcholovým pokrytím. Opět minimalizujeme počet vrcholů, občas i vážený počet.

Příklad druhý Uvažte ohodnocený graf zadaný níže:



1. Vysvětlete, jak by se z tohoto grafu dopočítala metrika, kterou graf určuje.
2. Jaké je optimální řešení TSP na tomto grafu? Jaké řešení nalezne nějaký běh Christofidesova algoritmu?
3. Když mám metriku popsanou grafem jako výše, už nehledám minimální kružnici přes všechny vrcholy. Jakou minimální strukturu v tomto grafu hledám?

Příklad třetí Proč se tak často opakuje, že bez trojúhelníkové nerovnosti se nedá TSP řešit? Zkusme si to osvětlit. *Obecné TSP* tedy mějme zadané jako problém TSP na množině bodů V se vzdálenostmi určenými libovolnou kladnou (třeba i symetrickou) délkovou funkcí $d\colon (V \times V) \to \mathbb{R}^+$.

Dokažte, že existuje-li $\mathcal{O}(1)$-aproximační algoritmus pro obecné TSP, tak $P = NP$.

(*Nápověda:* Pomocí tohoto algoritmu vyřešte nějaký NP-úplný problém.)

Příklad čtvrtý Z přednášky víme, že pro Christofidesův algoritmus platí, že $\mathrm{ALG} \le \frac{3}{2}\mathrm{OPT}$, kde ALG je velikost řešení algoritmu a OPT je velikost optimálního (minimálního) řešení.

Osvěžme si lineární programování a dokažme pomocí něj, že pro Christofidesův algoritmus platí, že $\mathrm{ALG} \le \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$, kde $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$ je optimální hodnota této lineární relaxace:

$$
\begin{aligned}
(P):& \qquad \min \sum_{e\in E} c_e x_e \\
\forall v \in V:& \qquad \sum_{e=vx} c_e x_e = 2 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset:& \qquad \sum_{e\in E(S,V\setminus S)} c_e x_e \ge 2 \\
\forall e \in E:& \qquad 0 \le x_e \le 1
\end{aligned}
$$

Plán boje je takovýto:

1. Nejprve se utvrďte v tom, že $\mathrm{ALG} \le \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$ implikuje původní výsledek $\mathrm{ALG} \le \frac{3}{2}\mathrm{OPT}$.
2. Pak dokažte, že pro optimální řešení x^* lineárního programu (P) (to je to řešení, které má hodnotu $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$) platí, že $\frac{n-1}{n}x^*$ je bod ležíci uvnitř mnohostěnu minimální kostry pro ten samý graf.
3. Nyní použijte bod 2 a dokončete důkaz, že $\mathrm{ALG} \le \frac{3}{2}\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$.

Pro připomenutí, *kostrový mnohostěn* chápeme jako mnohostěn určený těmito lineárními podmínkami:

$$\begin{aligned}
& & \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset\colon & & \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} c_e x_e \geq 1 \\
\forall e \in E\colon & & x_e \geq 0
\end{aligned}$$

Mnohostěn párování vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\forall v \in V\colon & & \sum_{e = vx} c_e x_e \leq 1 \\
\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset, |S| \text{ liché velikosti}\colon & & \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} c_e x_e \geq 1 \\
\forall e \in E\colon & & x_e \geq 0
\end{aligned}$$

Příklad pátý

Asymetrické TSP je problém nalezení minimálního TSP na orientovaném grafu, kde neplatí symetrie hran (ale trojúhelníková nerovnost ano).

První, co by nás mohlo napadnout, je použít Christofidesův postup:

1. Najít (neorientovanou) minimální kostru.
2. Co nejméně hranami doplnit kostru na eulerovský graf.

Nalezněte příklad orientovaného grafu s r opravdu dlouhými hranami (a se zbytkem hran s délkou 1), kde krok 1 nějakou minimální kostru nalezne a nalezená kostra jde doplnit na Eulerovský graf, ale i minimální doplnění této kostry používá všechny dlouhé hrany, zatímco optimum používá pouze 1 dlouhou hranu.

To nám naznačuje, že na asymetrické TSP budou potřeba jiné algoritmy, než na jeho symetrickou variantu.