

8. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *unimodulární*, pokud její determinant je $-1, 0$ nebo 1 .

D: Libovolná matice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1 .

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

T(Cramerovo pravidlo): Mějme soustavu $Ax = b$, kde matice A má nenulový determinant. Potom soustava má jediné řešení, jehož i -tá souřadnice je rovna podílu determinantů

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

kde matice A_i vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce vektorem pravých stran.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$. Nechť b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty): Uvažme celočíselný program $ILP = \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci $LP = \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP .

PŘÍKLAD PRVNÍ Nechť A je totálně unimodulární matice a nechť I je libovolně velká matice, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky $0, 1$ nebo -1 .
- Ukažte, že $A^T, \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice.

PŘÍKLAD DRUHÝ Mějme zadanou matici X . Ověřte, jestli matice X je totálně unimodulární, bez použití následujícího příkladu.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tip: Nejprve odvoďte tvrzení pro 2×2 matice, pak postupujte výše. Odkážete se na menší případy, kdy jen to bude možné.

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C . Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C .
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B , nebo oba patří do C .

Všimněte si, že například matice z předchozího příkladu tyto podmínky splňuje.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Vezměme si jeden vektor (sloupec) v s hodnotami $\{0, 1\}^n$. Řekneme, že v je *intervalový*, pokud v má hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (třeba i délky 0). Matice M je *intervalová*, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.

Dokažte, že pro každou intervalovou matici M platí, že M je totálně unimodulární.

PŘÍKLAD SEDMÝ Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x; Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky $-1, 0$ a 1 ? A co když zakážeme i -1 ?