6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplex a opakování geometrie

Příklad první Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn P a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$\begin{array}{lcrcr} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\geq 20 \\ 5x + 6y + 5z &\leq 50 \\ x + 3y + 5z &\leq 30 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d - 1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

T(Vrcholový popis konv. mnohostěnů**):** Každý omezený konvexní mnohostěn je roven konvexnímu obalu všech svých vrcholů. Omezené mnohostěny tedy můžeme popsat buď pomocí všech poloprostorů (pak počítáme jejich průnik) nebo pomocí všech vrcholů (pak počítáme jejich konvexní obal).

T: Každá vlastní stěna mnohostěnu je průnikem faset.

D: *Bazické řešení* je takové řešení soustavy $Ax \leq b$, které odpovídá regulární podmatici A' matice A.

Tedy hodnotu proměnných, které nejsou zastoupeny v A' nastavím na 0.

T(Bázická řešení jsou právě vrcholy konvexního mnohostěnu**):**

Bod x_i je vrcholem konvexního mnohostěnu daného soustavou $Ax \leq b$ dimenze $d \Leftrightarrow x_i$ je bazické řešení soustavy $Ax \leq b$.

Tedy: Bod x_i patří do mnohostěnu (splňuje všechny nerovnice) a zároveň splňuje d lineárně nezávislých nerovností přesně (s rovností).

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d + 1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\mathrm{conv}(0, (0, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 0))$$

D: Jednotková d-dimenzionální *krychle* je konvexní obal všech 2^d bodů $\{0,1\}^d$. Krychlí rozumíme (osové) vložení jednotkové krychle (klidně nižší dimenze).

D: d-dimenzionální křížový mnohostěn je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1,\dots,d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. (Tedy ve třech dimenzích jsou to body $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$.)

Příklad druhý

Dokažte nebo vyvraťte: Mějme d-dimenzionální simplex $S \subset \mathbb{R}^d$. Existuje nadrovina h taková, že průnik ani jednoho jí indukovaného (uzavřeného) poloprostoru s S není simplex (libovolné dimenze)?

Tip: Zkuste si nakreslit malé simplexy a odvodit to podle nich.

Příklad třetí

Určete, kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex.

Příklad čtvrtý

Spočítejte, kolik nadrovin je potřeba k určení d-dimenzionálního křížového mnohostěnu.

Příklad pátý

1. Zopakujte si, že stěna simplexu je sama simplexem.
2. Dokažte, že také každá stěna krychle je (posunutou) krychlí.
3. Platí obdobné tvrzení i pro křížový mnohostěn – tedy jsou fasety křížového mnohostěnu opět (posunuté) křížové mnohostěny?