# 3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, konvexita, afinita

*Příklady naleznete na zadní straně.*

---

**D:** Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud $A$ je tvaru $L+v$ pro nějaký lineární prostor $L$ a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Tvrzením „$A$ je tvaru $L+v$“ se myslí bijekce mezi vektory z $L$ a vektory $A$ zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru $A$ je rovna dimenzi jeho přidruženého linearního prostoru $L$.

**D:** Vektor $x$ je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i$ jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Mnozina bodu/vektoru $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ neni afinní kombinací ostatních.

**D:** Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů $A$, které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z $V$.

Podobně jako linearní prostory, i afinní prostory mají konečnou bazi, takže nemusíme uvažovat všechny konečné podmnožiny pro generovaní afinního obalu – stačí generovat afinní kombinace báze.

**D:** *Nadrovina* je libovolny afinni prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovine tedy je kazda primka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolna rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

**D:** Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v $K$ musí mít každý bod obsažený v $K$.

**D:** Vektor $x$ je *konvexní kombinací* množiny vektorů $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i$ jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0,1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *v konvexní poloze*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

**D:** Pro konvexitu můžeme také zadefinovat obal: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, její *konvexní obal* je množina všech vektorů $A$, které jsou konvexní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z $V$.

Zde je opravdu myslet na každou konečnou podmnožinu; konvexní množiny totiž nemají vždy konečnou bázi.

**D:** *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici $A$ a realný vektor $b$.

---

**Známe z lingebry:**

**T:**Každý lineární prostor dimenze $k$ obsahuje $k$-vektorovou bázi. Takovou bázi dokonce můžeme najít *ortogonální* (nebo dokonce *ortonormální*) a stejně tak můžeme najít *ortogonální doplněk* této báze.

**Z minula:**

PŘÍKLAD PRVNÍ   Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu $uv$ máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je min $\sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol $u$ máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

---

PŘÍKLAD DRUHÝ   Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

PŘÍKLAD TŘETÍ   Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n + 1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ v $\mathbb{R}^d$ je afinně nezávislá právě tehdy, když množina $n$ vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ   Alenka a Bob hrají hru. Alenka si vymyslí lineární nerovnost $N$ v $\mathbb{R}^3$, ale neřekne ji Bobovi. Bobovi jen řekne tři různé body $b_1, b_2, b_3$ v $\mathbb{R}^3$, které tuto nerovnost splňují. Bob nyní musí říkat další body $b_4, b_5, b_6 \ldots$, které také nerovnost splňují, a to do té doby, než to Alenku neomrzí a nepůjdou spolu skákat panáka.

Poraďte Bobovi, jak má hrát, aby vyhrál.

PŘÍKLAD PÁTÝ

1. Mohou se dvě 2D roviny protínat v jednom bodě, pokud jsme v $\mathbb{R}^4$?
2. *Na rozmyšlenou.* Mohou se dva $3D$ prostory (prostory dimenze 3) protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?

PŘÍKLAD ŠESTÝ

1. Dokažte, že každý afinní prostor jde vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin.
2. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množina řešení soustavy $\{x | c^T x = b\}$.

*Nápověda:* Kdykoli uvažujete o afinním prostoru, zkuste si jej posunout pomocí vektoru $-v$ zpátky do počátku a dále uvažujte jen přidružený lineární prostor $L$.

PŘÍKLAD SEDMÝ   *(Hlavní chod cvičení!)* Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d | Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD OSMÝ   Už víme, že množina $K$ je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v $K$. Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina $A$ je afinní podprostor $\mathbb{R}^d$ právě tehdy, když pro každé dva body $a, b \in A$ platí, že *přímka* určená body $a$, $b$ je celá obsažena v $A$.