

PŘÍKLAD PRVNÍ Vyřešený příklad: Dokažte z definice, že $\text{conv}(\{[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]\})$ je čtverec s vrcholy ve zmíněných bodech.

PŘÍKLAD DRUHÝ *Křížový mnohostěn* definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn*.

Mějme křížový mnohostěn A plné dimenze v \mathbb{R}^5 , který má střed posunutý do bodu $(5, 4, 3, 2, 1)$. Zároveň vezměme útvar $B \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1/2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.5\}$.

Rozhodněte, jestli útvar $A \cap B$ je konvexní nebo ne, a své tvrzení dokažte.

PŘÍKLAD TŘETÍ Alenka a Bob hrají hru. Alenka si vymyslí lineární nerovnost N v \mathbb{R}^3 , ale neřekne ji Bobovi. Bobovi jen řekne tři různé body b_1, b_2, b_3 v \mathbb{R}^3 , které tuto nerovnost splňují. Bob nyní musí říkat další body $b_4, b_5, b_6 \dots$, které také nerovnost splňují, a to do té doby, než to Alenku neomrzí a nepůjdou spolu skákat panáka.

Poradte Bobovi, jak má hrát, aby vyhrál.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Pro množinu bodů X v \mathbb{R}^n platí, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in X$ je celá úsečka $[x_1, x_2]$ obsažena v X .
- Pro množinu bodů X v \mathbb{R}^n platí, že $X = \{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in X, \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$, čili $X = \text{conv}(X)$.

Dvě konvexní vlastnosti:

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že když body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ splňují sadu omezení $\vec{a}_i^T \cdot \vec{x}_j \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ platí, že:

$$\vec{a}_i^T \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j \right) \leq b_i.$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte, že když body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ splňují sadu omezení $\vec{a}_i^T \cdot \vec{x}_j \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ platí, že:

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k \vec{a}_k) \cdot \vec{x}_j \leq \sum_{m=1}^n (\beta_m b_m).$$

Všimněte si rozdílu v zadání těchto příkladů!

Tip: Dokazujte obě tvrzení pro co nejmenší množinu objektů, tj. první tvrzení pro jedno omezení a druhé tvrzení pro jeden bod.

PŘÍKLAD SEDMÝ Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:

$$\max c^T x, Ax \leq b$$

je konvexní množina.

PŘÍKLAD OSMÝ Dokažte, že když mnohostěn $Ax \leq 0$ má dvě různá řešení, tak je neomezený.