7. CVIČENÍ Z KOMBINATORIKY A GRAFŮ

Vrcholová a hranová souvislost

Příklad první Dokažte, že pro kubické (3-regulární) grafy hranová a vrcholová souvislost koincidují.

Řešení. Použijeme Ford-Fulkersonovu a Mengerovu větu a všimneme si, že v 3-regulárním grafu jsou každé dvě hranově disjunktní cesty i vrcholově disjunktní. Pokud dvě cesty sdílejí vrchol, tak musí sdílet i jednu hranu s ním incidentní, protože kvůli stupni tři není možné, aby měly obě cesty svou vlastní vstupní i výstupní hranu. Vrcholově disjunktní cesty jsou zjevně též hranově disjunktní. Kdyby nebyly, tak sdílí dva vrcholy společné hrany, a tím pádem nejsou vrcholově disjunktní. Dostáváme, že v 3-regulárním grafu jsou počty hranově a vrcholově disjunktních cest stejné a z výše zmíněných vět je tedy stejná i hranová a vrcholová souvislost.

Druhý způsob je použít tvrzení $k_v(G) \leq k_e(G)$ z přednášky a najít ke každému vrcholovému řezu stejně velký hranový řez. Dá se nahlédnout, že pro každý vrchol v náležející nějakému vrcholovému řezu S existuje komponenta souvislosti, která je s vrcholem v spojená právě jednou hranou e_v. Množina $\{e_v | v \in S\}$ těchto hran tvoří hranový řez stejné velikosti.

Příklad druhý Ukažte, že každý souvislý kubický bipartitní graf je hranově 2-souvislý.

Řešení. Hranová 2-souvislost znamená, že neexistuje hranový řez velikosti jedna. Předpokládejme pro spor, že existuje hrana uv, jejímž odebráním se $G = (A \cup B, E)$ rozpadne na komponenty souvislosti. Bez újmy na obecnosti, nechť $u \in V(A)$ a $v \in V(B)$. Vezměme si komponentu souvislosti X obsahující v a její partity X_A a X_B. Z X_A do X_B vede $3|X_A|$ hran. Z X_B do X_A vede $3|X_B| - 1$ hran, protože hrana uv z vrcholu v vede do $G - X$. Protože jsme počítali hrany mezi dvěma partitami v komponentě souvislosti, musí se čísla rovnat. Dostáváme ale, že $|X_B| - |X_A| = \frac{1}{3}$, což je spor s tím, že počty vrcholů v partitách X jsou celočíselné.

Příklad třetí Rozhodněte, jak se mohou změnit vrcholová a hranová souvislost pokud odebereme nebo kontrahujeme jednu hranu.

Řešení. Úlohu si rozdělíme na dvě části podle operace s hranou.

- odebrání hrany e. Pro hranovou souvislost si všimneme, že se sníží o jedna (pokud e náležela nějakému minimálnímu hranovému řezu) anebo zůstane stejná (pokud e nenáleží žádnému minimálnímu hranovému řezu). Vrcholová souvislost může též zůstat stejná anebo se sníží (ale též nejvýše o jedna).
- kontrakce hrany e. Hranová i vrcholová souvislost se může snížit o jedna, zůstat stejná anebo zvýšit. Snížení o jedna nastane pro vrcholovou i hranovou souvislost při kontrakci libovolné hrany K_n. Zachování vrcholové i hranové souvislosti nastane například při kontrakci hrany, která je součástí nějaké delší indukované cesty, třeba hrana v cyklu delším než tři. Hranová souvislost se zvýší, pokud kontrahujeme hranu, která je mostem. Vrcholová souvislost se zvýší například kontrakcí hrany, jejíž jeden z koncových vrcholů má stupeň jedna (neboli je incidentní s listem) - samozřejmě pokud graf není K_2.

Důkaz, že odebrání a kontrakce hrany sníží vrcholovou souvislost nejvýše o jedna najdete například na `http://matematika.reseneulohy.cz/3815/grafove-operace`.

Příklad čtvrtý Dokažte, že graf je hranově 2-souvislý právě když má silně souvislou orientaci.

Řešení. Dokážeme obě implikace:

- Mějme silně souvislý orientovaný graf. Z definice silné souvislosti existuje pro každou dvojici vrcholů u,v orientovaná cesta z u do v a také orientovaná cesta z v do u. Můžeme si všimnout, že tyto dvě cesty jsou hranově disjunktní, proto když zapomeneme orientaci všech hran, dostáváme hranově 2-souvislý graf.
- Mějme hranově 2-souvislý graf. Chceme ukázat, že existuje orientace hran taková, že výsledný graf je silně souvislý. Z hranové 2-souvislosti a Ford-Fulkersonovy věty víme, že pro každou dvojici vrcholů u a v existují dvě hranově disjunktní cesty mezi nimi. Stačí tedy najít správnou orientaci. To můžeme udělat například tak, že spustíme prohledávání do hloubky z libovolného vrcholu x a hrany kostry, kterou pomocí algoritmu najdeme, zorientujeme od x k listům a ostatní hrany zorientujeme od listů k x (neboli ostatní hrany budou orientované k tomu koncovému vrcholu, který je blíže k x).