5. CVIČENÍ Z KOMBINATORIKY A GRAFŮ

Konečné projektivní roviny a latinské čtverce

Projektivní rovina je množinový systém (B, P), kde B je množina bodů a $P \subseteq 2^B$ je množina přímek s následujícími vlastnostmi:

- A1 Pro každou dvojici bodů $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$ platí, že existuje právě jedna přímka $p \in P$ taková, že $b_1, b_2 \in p$.
- A2 Pro kadou dvojici přímek $p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$ platí, že existuje právě jeden bod $b \in B$ takový, že $b \in p_1 \cap p_2$.
- A3 Existuje $C \subseteq B$, $|C| = 4$ taková, že pro každou přímku $p \in P$ platí $|p \cap C| \leq 2$.

Příklad první Dokažte, že pro nekonečně mnoho n existuje graf s n vrcholy, který má $\Omega(n^{3/2})$ hran a neobsahuje C_4 jako podgraf.

Příklad druhý Dokažte, že v definici projektivní roviny můžeme axiom A3 nahradit následujícím axiomem, pokud $|B| \geq 2$:

A3" B nelze pokrýt dvěma přímkami

Proč potřebujeme předpoklad o velikosti B?

Příklad třetí Nechť $n \geq 2$, (B, P) je systém podmnožin, kde $|B| = n^2 + n + 1 = |P|$. Pro každou množinu $p \in P$ platí $|p| = n + 1$ a pro každou dvojici množin $p_1, p_2 \in P$ platí $|p_1 \cap p_2| \leq 1$. Dokažte:

1. pro každé $x, y \in B$ existuje právě jedna množina $p \in P$ taková, že $x, y \in p$
2. každým bodem prochází nejvýše $n + 1$ množin
3. každým bodem prochází právě $n + 1$ množin
4. pro každé dvě množiny $p_1, p_2 \in P$ platí $|p_1 \cap p_2| \neq \emptyset$
5. (B, P) je projektivní rovina řádu n (za předpokladu, že [A3] je ekvivalentní s tvrzením, že existují alespoň dvě různé přímky, z nichž každá obsahuje alespoň 3 body.)

Příklad čtvrtý Existují ortogonální latinské čtverce pro každý řád $n > 1$?