KOMBINATORIKA A GRAFY 1

3. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 21.11.2020

Nehledejte řešení úloh na internetu. Řešení odevzdávejte v pdf do MS Teams.

První úloha **[2 body]**

Nechť n je prvočíslo, konstruujme matice $A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}$ tak, že $A^k_{i,j} = (i + kj) \mod n$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokud uvážíme $0 \equiv n$, pak $A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu n.

Řešení. Potřebujeme ověřit, že

- *Každý čtverec obsahuje v každém řádku každé číslo z množiny* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ *právě jednou.* Mějme čtverec A^s pro libovolné $s \in \{0, \ldots, n-1\}$. Nechť $A^s_{i,j} = A^s_{i,j'}$. Pak z definice A^s máme $i + sj = i + sj'$, z čehož plyne $j = j'$, takže se v řádcích žádná hodnota nevyskytuje vícekrát. Společně s faktem, že uvažujeme hodnoty modulo n a délka řádku je n dostáváme, že každá hodnota se v každém řádku vyskytuje právě jednou.
- *Každý čtverec obsahuje v každém sloupci každé číslo z množiny* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ *právě jednou.* Opět mějme čtverec A^s pro libovolné $s \in \{0, \ldots, n-1\}$. Nechť $A^s_{i,j} = A^s_{i',j}$. Pak z definice A^s máme $i + sj = i' + sj$, z čehož plyne $i = i'$. Tím získáváme, že se ve sloupci neopakuje žádná hodnota a společně s výškou sloupce a rozsahem hodnot dostáváme, že každý sloupec obsahuje každou hodnotu právě jednou.
- *Každé dva čtverce A^s a A^t jsou navzdájem ortogonální, tedy* $(A^s_{i,j}, A^t_{i,j}) = (A^s_{k,\ell}, A_{k,\ell^t})$ *implikuje* $(i, j) = (k, \ell)$. Z definice čtverců a ortogonality dostáváme

$$i + sj = k + s\ell$$
$$i + tj = k + t\ell$$

Z čehož plyne

$$i - k = s(\ell - j)$$
$$i - k = t(\ell - j)$$

Z čehož dostáváme $s(\ell - j) = t(\ell - j)$, což pro $s \neq t$ implikuje $\ell = j$ a po dosazení do původního tvaru rovnic i $k = i$, což jsme chtěli ukázat.

Druhý úloha **[3 body]**

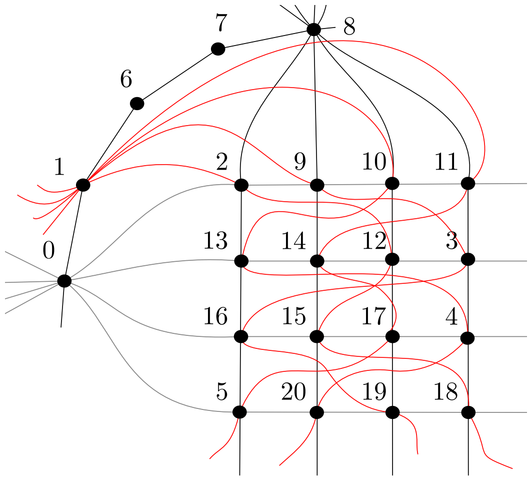
Najděte sadu tří ortogonálních latinských čtverců řádu 4. Popište způsob konstrukce, nehledejte řešení hrubou silou. *Nápověda: využijte konstrukci z přednášky.*

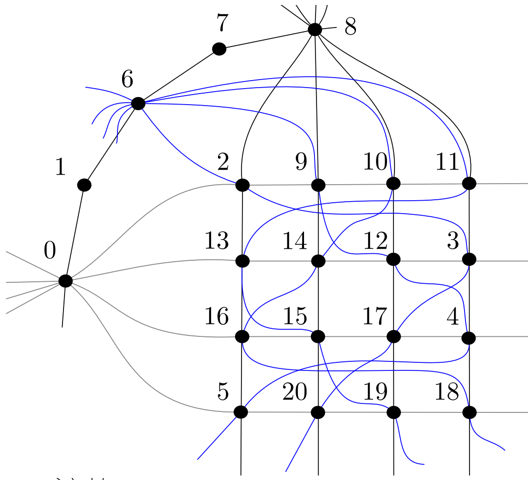
Poznámka: Můžete zkonstruovat i 4 ortogonální latinské čtverce řádu 5 či $n-1$ ortogonálních latinských čtverců řádu n pro $4 \leq n \leq 9$. Bude-li se vám hodit nějaký algebraický či kombinatorický objekt (nikoli přímo sada latinských či jiných čtverců), můžete si jej nalézt v literatuře či na internetu a použít ho, nemusíte jej vytvářet sami.

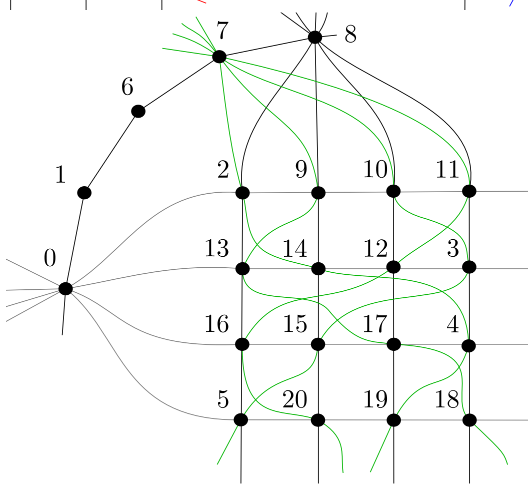
Řešení. Vezmeme konečnou projektivní rovinu řádu 4, například $B = \{0, \ldots, 20\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\{0,1,6,7,8\}, \{0,2,9,10,11\}, \{0,3,12,13,14\}, \{0,4,15,16,17\},\\ &\{0,5,18,19,20\}, \{1,2,12,15,18\}, \{1,3,9,16,19\}, \{1,4,10,13,20\},\\ &\{1,5,11,14,17\}, \{2,3,6,17,20\}, \{2,4,7,14,19\}, \{2,5,8,13,16\},\\ &\{3,4,8,11,18\}, \{3,5,7,10,15\}, \{4,5,6,9,12\}, \{6,10,14,16,18\},\\ &\{6,11,13,15,19\}, \{7,9,13,17,18\}, \{7,11,12,16,20\}, \{8,9,14,15,20\},\\ &\{8,10,12,17,19\}\} \end{aligned}$$

Sadu tří ortogonálních latinských čtverců řádu 4 pomocí této konečné projektivní roviny získáme konstrukcí z přednášky. Konkrétně vybereme jednu přímku, například $\{0, 1, 6, 7, 8\}$, která bude speciální. Zbylé body uspořádáme do čtverce 4×4 tak, aby přímky procházející bodem 0 tvořily řádky a přímky procházející bodem 8 tvořily sloupce. Každý z těchto 16-ti bodů reprezentuje jedno pole ve čtverci 4×4. Přímky procházející body $\{1, 6, 7\}$ budou určovat jednotlivé latinské čtverce. Na třech obrázcích níže jsou přímky procházející 0 šedé, přímky procházející bodem 1 červené, přímky procházející bodem 6 modré, přímky procházející bodem 7 zelené a zbylé přímky jsou černé.







Pro každý čtverec máme 4 přímky, které ho určují. Každé přímce určíme nějaké číslo, které dostanou všechny body mřížky, kterými přímka prochází. Protože na permutaci nezáleží, volíme číslo tak, že první řádek odpovídá 1234. Získáváme následující řadu čtverců:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Třetí úloha **[1 bod]**

Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Řešení. Dvěma způsoby spočítáme dvojice dětí na táboře. První způsob je spočítat počet dvojic z celkového počtu dětí, což odpovídá $\binom{15}{2}$. Druhý způsob je spočítat počet dvojic jako počet dvojic, které měly společnou službu, tedy počet dní d vynásobený $\binom{3}{2}$, protože při každé se potkalo $\binom{3}{2}$ dvojic dětí. Získáváme $\binom{15}{2} = p \cdot \binom{3}{2}$, takže $p = \frac{105}{3} = 35$.

Čtvrtá úloha **[1 bod]**

Dokažte rovnost

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

pomocí vhodné interpretace levé a pravé strany.

Řešení. V levé části výrazu je počet způsobů, jak vybrat n prvků z $2n$ prvků. V pravé části výrazu počítáme to samé, jen si $2n$ prvků rozdělíme na dvě části a sčítáme přes všechna $0 \leq k \leq n$ součin počtu způsobů, jak vybrat z první části k prvků, a počtu způsobů, jak z druhé části vybrat $n-k$ prvků.

Pátá úloha **[3 body]**

Škola má b učitelů a c studentů, pro které platí:

- každý učitel učí právě k studentů
- pro každou dvojici různých studentů existuje právě h učitelů, kteří je učí.

Dokažte, že

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

Řešení. Spočítáme dvěma způsoby dvojce $(u, \{s, t\})$, kde u je učitel, který učí dvojici studentů s a t. První způsob je vzít všechny dvojice studentů a vynásobit je počtem učitelů, kteří je učí, $\binom{c}{2} \cdot h$. Druhý způsob je vzít všechny učitele a vynásobit je počtem dvojic studentů, které učí. Jelikož každý učitel učí k studentů, tak zároveň učí $\binom{k}{2}$ dvojic studentů. Jelikož počítáme oběma způsoby stejnou věc, dostáváme $\binom{c}{2} \cdot h = b \cdot \binom{k}{2}$, z čehož už snadno plyne dokazovaná rovnost.