KOMBINATORIKA A GRAFY I.

Tomáš Valla, Jiří Matoušek

Katedra aplikované matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

29. května 2008

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Tento učební text je určen posluchačům přednášky *Kombinatorika a grafy I* na Matematicko-fyzikální fakultě UK Praha. Navazuje na skripta Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila *Kapitoly z diskrétní matematiky* a stručně pokrývá základy některých dalších důležitých oblastí jako Ramseyova teorie, toky v sítích, párování a hamiltonovské kružnice v grafech. Obsahuje též důkaz Kuratowského věty o rovinných grafech.

Na koncepci přednášky mají největší podíl prof. Jaroslav Nešetřil a prof. Jan Kratochvíl. Tento text s výjimkou kapitoly o Kuratowského větě napsal první autor, Tomáš Valla, na základě poznámek z přednášek prof. Kratochvíla a v menší míře i dalších pramenů. Druhý autor, Jiří Matoušek, přispěl mnoha poznámkami, úpravami a opravami. Chtěli bychom také poděkovat Michalu Zerolovi, který sepsal první verzi kapitoly o Kuratowského větě.

Zaslání objevených chyb (faktických, pravopisných i typografických), zlepšovacích návrhů či názorů prvnímu autorovi na adresu `tom@ucw.cz` je velice vítáno.

Za nejrůznější připomínky a upozornění na chyby mnohokrát děkujeme následujícím lidem: Jakub Černý, Cyril Hrubiš, Jan Kára, Dan Král', Jan Kratochvíl, Pavel Krč, Martin Loebl, Vladan Majerech, Helena Nyklová a Miroslav Rudišin.

Praha, 29. května 2008

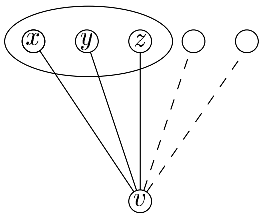
Tomáš Valla, Jiří Matoušek

Obsah:

1. Úvod do Ramseyovy teorie

Hříčka. *Ve společnosti šesti lidí se vždy vyskytují* 3 *lidé, kteří se navzájem znají, nebo* 3 *lidé, kteří se navzájem neznají.*

Důkaz. Společnost namodelujeme jako graf G, jehož vrcholy budou lidé a hrana mezi nimi povede, pokud se navzájem znají. Zvolme libovolný vrchol v grafu G. Z vrcholu v vedou alespoň 3 hrany nebo 3 nehrany. Ať jsou to nejprve hrany a ať vedou do vrcholů x, y, z.



Pokud mezi těmito třemi vrcholy existuje byť jen jediná hrana, nalezli jsme trojúhelník. A pokud mezi nimi žádná hrana není, máme z nich nezávislou množinu. Když uvažujeme nehrany, je postup shodný. □

Předešlou hříčku můžeme považovat za jedno z prvních netriviálních tvrzení, jimž říkáme souhrnně *ramseyovské věty*. Takové věty obvykle říkají, že v každém dostatečné velkém objektu lze najít nějaký stejnorodý podobjekt. V mnoha případech se ukazuje překvapivá skutečnost, že pro existenci vnitřní pravidelnosti stačí pouhý předpoklad dostatečné velikosti zkoumaného objektu. Populárně a poněkud nepřesně vyjádřeno, uvnitř dostatečně velkých objektů „není možný totální chaos". V této kapitole ukážeme několik nejznámějších ramseyovských tvrzení.

Od hříčky tedy přejdeme k plnohodnotnému tvrzení, jež roku 1930 v mírně odlišné podobě publikoval anglický matematik a ekonom Frank Ramsey.

Věta (Ramseyova pro grafy). *Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo N tak, že libovolný graf na N vrcholech obsahuje úplný podgraf na n vrcholech nebo nezávislou množinu n vrcholů.*

Trochu obecněji: Pro každá přirozená čísla n a r existuje přirozené číslo N takové, že je-li každá hrana grafu K_N obarvena některou z r barev, potom existuje jednobarevný podgraf K_n, tedy úplný podgraf na n vrcholech, jehož všechny hrany mají stejnou barvu.

Jak plyne první část ze druhé? Každou hranu daného grafu na N vrcholech nahradíme červenou hranou, zatímco každou nehranu nahradíme modrou hranou. Tím dostaneme graf K_N s hranami obarvenými červeně a modře, a pro něj použijeme druhou část věty s $r = 2$.

Důkaz. Nejprve dokážeme větu pro dvě barvy ($r = 2$). Až z ní odvodíme větu pro libovolný počet barev.

Definujme číslo $R(k, \ell)$ takto:

$$R(k,\ell) := \min \left\{ N;\ \begin{array}{l}\text{každý } K_N \text{ s hranami obarvenými červeně a modře obsa-}\\ \text{huje červený } K_k \text{ nebo modrý } K_\ell\end{array} \right\}.$$

Číslu $R(k, \ell)$ se říká *Ramseyovo číslo* (pro grafy a pro dvě barvy).

Potřebujeme dokázat, že $R(n,n) < \infty$, ale ve skutečnosti ukážeme, že dokonce $R(k,\ell)$ je konečné pro každé k,ℓ. Půjdeme na to indukcí podle $k+\ell$.

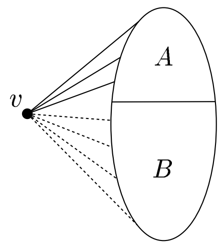
V případě $k = 1$ nebo $\ell = 1$ stačí vybrat jeden libovolný vrchol. Máme tedy $R(1,\ell) = 1$, $R(k,1) = 1$.

Předpokládejme tedy, že $R(k-1,\ell)$ je konečné a že $R(k,\ell-1)$ je konečné. Dokážeme, že též $R(k,\ell)$ je konečné. Konkrétně ověříme, že

$$R(k,\ell) \le R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1).$$

Položme $N = R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$ a uvažme graf K_N s libovolným obarvením hran dvěma barvami, červenou a modrou. Ukážeme, že obsahuje podgraf K_k se všemi hranami červenými nebo podgraf K_ℓ se všemi hranami modrými.

Zvolme libovolný vrchol v tohoto K_N. Zbývající vrcholy rozdělíme na dvě množiny A a B: Množina A je tvořena vrcholy, do nichž vedou z vrcholu v červené hrany, a množina B sestává z vrcholů, do nichž vedou z vrcholu v modré hrany.



Máme $|A| + |B| = N - 1 = R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1) - 1$, a tedy $|A| \ge R(k-1,\ell)$ nebo $|B| \ge R(k,\ell-1)$.

Předpokládejme nejdřív, že $|A| \ge R(k-1,\ell)$. Když podgraf indukovaný množinou A obsahuje červený K_{k-1}, připojíme k němu vrchol v a máme červený K_k. Pokud v A žádný červený K_{k-1} není, musí tam být modrý K_ℓ.

Pro $|B| \ge R(k,\ell-1)$ je úvaha podobná. Když B obsahuje modrý $K_{\ell-1}$, připojíme k němu vrchol v a dostaneme modrý K_ℓ. V opačném případě B obsahuje celý červený K_k.

Všechny možnosti tedy vedou k existenci jednobarevného K_k nebo K_ℓ, a podle předchozích úvah taktéž ke konečnosti $R(k,\ell)$. Tím je Ramseyova věta pro grafy dokázána pro dvě barvy.

Uvažme nyní tři barvy. Položíme $M = R(n,n)$ a $N = R(n,M)$, kde $R(k,\ell)$ je Ramseyovo číslo zavedené výše. Je-li dán graf K_N s hranami obarvenými červenou, modrou a žlutou, slijeme nejdřív barvy modrou a žlutou do jediné, zelené. Tím máme K_N obarvené červeně a zeleně, a podle definice $R(n,M)$ v něm najdeme červený K_n nebo zelený K_M. V prvním případě jsme hotovi. Ve druhém případě máme K_M, jehož hrany jsou v původním červeno-modro-žlutém obarvení jen modré a žluté. Protože jsme volili $M = R(n,n)$, najdeme v našem K_M modrý K_n nebo žlutý K_n. Tím je dokázána věta pro 3 barvy.

Pro čtyři barvy převedeme stejným postupem problém na větu pro tři barvy, a tak dále. Věta tedy platí pro libovolný konečný počet barev.

Lze také nahlédnout, že pro libovolný konečný počet barev uspěje postup podobný, jaký jsme použili pro dvě barvy. Zadefinujeme Ramseyovo číslo $R(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ pro r barev a v indukci volíme velikost grafu jako součet r takových Ramseyových čísel. $\square$

Větu ještě dále zobecníme, namísto hran grafu (tedy dvojic vrcholů) budeme mít obarvené p-tice prvků.

Ramseyova věta pro systémy p-tic. *Pro všechna přirozená čísla n, r, p existuje přirozené číslo N tak, že kdykoli X je N-prvková množina a každá její p-prvková podmnožina je obarvena některou z barev $1, 2, \ldots, r$, pak existuje n-prvková množina $Y \subset X$ taková, že všechny její p-prvkové podmnožiny mají stejnou barvu.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle p. Pro $p = 1$ jde o Dirichletův přihrádkový princip a pro $p = 2$ je to Ramseyova věta pro grafy (dvojice prvků jsou hrany grafu).

Na chvíli si mysleme, že potřebnou velikost N množiny X už známe a p-tice prvků X jsou obarveny $r = 2$ barvami. Položíme $X_0 := X$ a uděláme následující krok pro $i = 1, \ldots, 2n - 1$:

- Zvolíme libovolný prvek $x_i \in X_{i-1}$ a obarvíme každou $(p-1)$-prvkovou podmnožinu S množiny $X_{i-1} \setminus \{x_i\}$ tou barvou, již má p-tice $S \cup \{x_i\}$. Podle indukčního předpokladu existuje dostatečně velká podmnožina X_i množiny $X_{i-1} \setminus \{x_i\}$, v níž všechny $(p-1)$-tice mají stejnou barvu b_i.

Některá z barev se objeví (z přihrádkového principu) mezi barvami b_i alespoň n-krát, dejme tomu červená. Potom $\{x_i;\ b_i = \text{červená}\}$ je hledanou n-prvkovou množinou Y. Velikost N množiny X tedy lze zvolit dostatečně obrovskou (ale stále ještě konečnou) tak, aby množina X postačila na všechny kroky.

Pro $r > 2$ barev je možné větu dokázat několika způsoby. Můžeme například provádět více kroků, pro $i = 1, 2, \ldots, rn - 1$, a opět si všimneme, že číslo N lze zvolit dostatečně velké, aby byly všechny argumenty správné. Anebo lze použít přebarvovací metodu téměř stejně jako v Ramseyově větě pro grafy. Dvě barvy slijeme do jediné, aplikujeme větu na menší počet barev, čímž dostaneme číslo N, a větu použijeme ještě jednou, tentokrát pro $n := N$. ☐

Ramseyova věta pro p-tice se také často zapisuje touto zkratkou:

$$N \to (n)^p_r.$$

Značení čteme: „Velikost N libovolné množiny X, na níž všechny p-tice obarvíme některou z r barev, postačuje pro existenci homogenní podmnožiny velikosti n.“

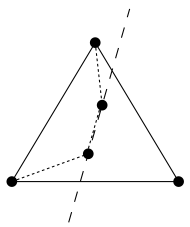
Použití Ramseyovy věty pro p-tice ukážeme v následujícím tvrzení.

Věta (Erdős, Szekeres). *Pro každé k existuje N takové, že libovolná N-prvková množina bodů v rovině v obecné poloze (žádné 3 body neleží na přímce) obsahuje množinu vrcholů konvexního k-úhelníku.*

Důkaz. Nejdříve geometrickou úvahou dokážeme speciální případ věty s $k = 4$. Z toho a z Ramseyovy věty pro p-tice, s $p = 4$, pak odvodíme případ obecný.

Místo „množina vrcholů konvexního k-úhelníku“ budeme říkat také „k bodů v konvexní poloze“.

Ukážeme, že pro $k = 4$ stačí $N = 5$. Vezměme libovolných pět bodů v rovině v obecné poloze a sestrojíme jejich konvexní obal. Může to být buď pětiúhelník nebo čtyřúhelník (v těchto případech jistě máme 4 body v konvexní poloze), anebo trojúhelník. V případě trojúhelníku vždy můžeme sestrojit čtyřprvkovou množinu v konvexní poloze vynecháním jednoho vrcholu trojúhelníku: Přímka spojující dva vnitřní body vždy odřízne jeden vrchol trojúhelníku.



Nyní nechť $k > 4$. V libovolné k-prvkové množině bodů v obecné poloze obarvíme každou čtveřici v konvexní poloze červeně, zatímco každou čtveřici, která není v konvexní poloze, obarvíme modře.

červeně modře

Ramseyova věta s $p = 4$, $r = 2$ a $n = k$ říká, že existuje N-bodová množina X a její k-bodová podmnožina Y taková, že všechny čtveřice na ní mají tutéž barvu. Protože už na pěti bodech existuje nějaká červená čtveřice (případ $k = 4$), všechny čtveřice na Y budou červené, nebude se v ní vyskytovat ani jedna nekonvexní čtveřice, takže body množiny Y leží v konvexní poloze. □

Poznámka. Větu je také možné dokázat metodami kombinatorické geometrie, odhad nutné velikosti množiny vyjde jejich použitím daleko nižší, nicméně důkaz pomocí Ramseyovy věty je podstatně jednodušší.

2. Toky v sítích

2.1 Definice a formulace hlavní věty.

Definice. *Sítí* nazveme čtveřici (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany nezápornými reálnými čísly.

Tok v síti je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

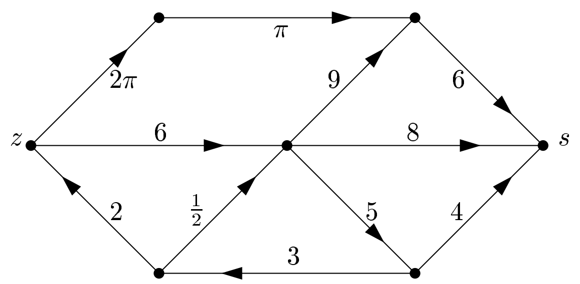
(1) Pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \le f(e) \le c(e)$.
(2) Pro každý vrchol $u \in V$ mimo zdroj a stok platí

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u,y).$$

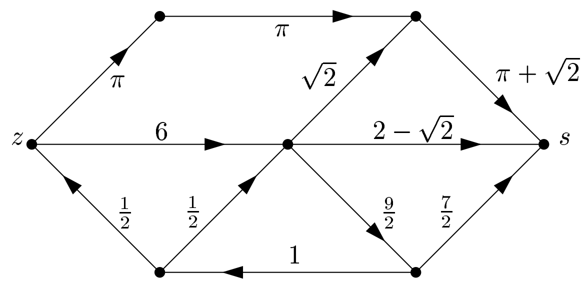
Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z).$$

Příklad sítě:



Příklad toku v této síti:



Budeme zkoumat, jaký maximální tok může danou sítí procházet. Naším předchozím příkladem prochází tok velikosti $\pi + \frac{11}{2}$, který však zřejmě maximální není.

Síť si lze představovat jako soustavu jednosměrných vodovodních trubek, kde každá má předepsanou maximální propustnost, a dvě význačná místa – zdroj a stok. Ve zdroji pouštíme vodu dovnitř a ve stoku voda vytéká ven. Tok je potom rozvržení, jak skutečně v našich trubkách voda proudí. Trubkou nesmí téci více, než je její kapacita, a vodovod „není děravý“ – to, co vteče do určitého vrcholu sítě (s výjimkou zdroje a stoku), zase vyteče ven. (Druhá podmínka je také ve fyzice známá pod názvem *Kirchhoffův zákon*, konkrétně první Kirchhoffův zákon.)

Velikostí toku se rozumí množství vody, které přebývá ve stoku, nebo ekvivalentně kolik vody je třeba posílat do zdroje. Ačkoli se to z náhledu jeví zřejmé, v definici velikost toku zavedeme jako množství vody posílané do zdroje a rovnost obou veličin ukážeme formálně později.

Skutečnosti o tocích v sítích, které si ukážeme, se samozřejmě nevztahují pouze na čistou teorii, hloubavý čtenář jistě sám vymyslí množství aplikací v praxi. Zmiňme například systémy telefonních linek (hrany jsou kabely a tok jsou hovory či datové přenosy), elektrické rozvody, finanční sítě (peněžní toky), dopravní sítě (tok vozidel dopravními komunikacemi).

Začneme následujícím:

Tvrzení. *Pro každou síť existuje maximální tok.*

Toto tvrzení není vůbec samozřejmé. Toků je nekonečně mnoho a jejich velikosti jsou obecně reálná čísla, a tedy je třeba opatrnost (například interval $I = (0, 1)$ na reálné ose nemá maximum). Důkaz tvrzení používá metody matematické analýzy a pro nás je spíše postranním tématem, takže ho odložíme až na konec kapitoly. Pro celočíselné a racionální kapacity navíc dostaneme existenci maximálního toku jednodušším způsobem, taktéž uvedeným později.

Teď zavedeme další důležitý pojem: řez.

Definice. *Řezem mezi zdrojem z a stokem s* v síti (G, z, s, c) nazveme množinu hran $R \subseteq E(G)$ takovou, že v síti (G', z, s, c) neexistuje žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku, kde $G' = (V(G), E(G) \setminus R)$.

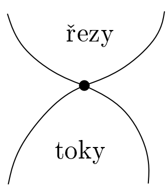
Kapacita řezu je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

V této kapitole budeme pro krátkost říkat řezu mezi z a s prostě řez.[1]

Narozdíl od toků je řezů konečně mnoho (nejvýš tolik jako všech podmnožin množiny E), a tudíž zjevně existuje řez minimální kapacity. Nyní vyslovíme nejdůležitější výsledek o tocích.

Hlavní věta o tocích. *(„Maximální tok je roven minimálnímu řezu") Pro každou síť se velikost maximálního toku rovná kapacitě minimálního řezu:*

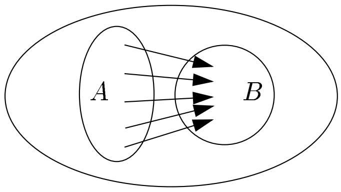
$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R)$$



2.2 Důkaz hlavní věty.

Začneme podrobnějším studiem řezů. Zavedeme konvenci pro značení množiny hran, které vedou z části sítě A do části B:

[1]Pojem *řez* má ve skutečnosti mnohem širší význam, zde však nebude hrozit nebezpečí zmatení.



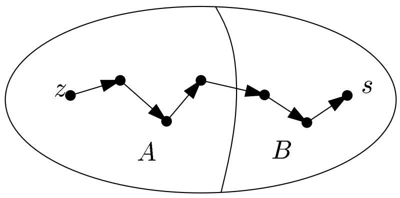
$$S(A,B) = \{(x,y);\ x \in A,\ y \in B,\ (x,y) \in E\}$$

(hrany jdoucí obráceným směrem, z B do A, do $S(A,B)$ nepatří!). Pro kapacitu a velikost toku analogicky

$$c(A,B) = c(S(A,B))$$
$$f(A,B) = f(S(A,B)) = \sum_{e \in S(A,B)} f(e).$$

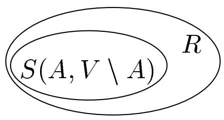
Je dobré si uvědomit následující více či méně viditelné vlastnosti řezů.

Vlastnost 1. *Rozdělíme-li síť na dvě disjunktní podmnožiny vrcholů A a B tak, že $z \in A$ a $s \in B$, potom množina $S(A,B)$ je řez (říkáme mu elementární řez).*



Důkaz. Kdyby existovala orientovaná cesta ze zdroje do stoku, museli nutně jistou hranou přejít z množiny A do množiny B. Taková hrana však podle definice patří do $S(A,B)$, množina $S(A,B)$ tedy tvoří řez. □

Vlastnost 2. *Každý řez obsahuje elementární řez.*



Důkaz. Vezmeme množinu A vrcholů, do kterých vede v rozříznuté síti orientovaná cesta ze zdroje. Řez R potom obsahuje elementární řez $S(A, V \setminus A)$, protože kdyby hrana $e = (u,v)$ z $S(A, V \setminus A)$ nepatřila do řezu R (tedy $u \in A$, ale $v \notin A$), existovala by orientovaná cesta $z, \ldots, u, v$ v rozříznuté síti, takže by byl $v \in A$. □

Vlastnost 3. *Každý v inkluzi minimální řez R je elementární; minimální v inkluzi znamená, že $R \setminus \{e\}$ není řez pro žádnou hranu $e \in R$.*

Důkaz. Plyne jednoduše z Vlastnosti 2. □

Lemma. *Pro každou $A \subseteq V$ obsahující zdroj a ne stok a pro libovolný tok f platí $w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A)$. Speciálně tedy $w(f) = \sum_{(x,s)\in E} f(x,s) - \sum_{(s,x)\in E} f(s,x)$.*

Důkaz. Pro každý vrchol u z A mimo zdroj platí Kirchhoffův zákon

$$\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = 0,$$

pro zdroj pak

$$\sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = w(f).$$

Sečteme dohromady do jediné rovnice levé strany a pravé strany předchozích rovnic. Dostaneme tím

$$\sum_{u\in A} \left(\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u) \right) = w(f),$$

po úpravě

$$\sum_{\substack{u\in A\\ v\notin A}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\notin A\\ v\in A}} f(u,v) = w(f),$$

což je přesně $f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = w(f)$. □

Když dáme dohromady zjištěná fakta, dostaneme následující nerovnost mezi maximálním tokem a minimálním řezem, jež je snadnější částí hlavní věty. Z trubkové analogie se sice zdá být zřejmou, nicméně chceme-li ji dokázat poctivě, dá to nějakou práci.

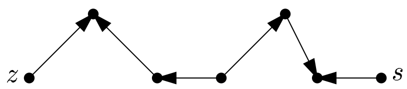
Důsledek. *Pro každý tok f a každý řez R je $w(f) \le c(R)$. Tudíž maximální tok je nejvýš roven minimálnímu řezu.*

Důkaz. V daném řezu R je obsažen nějaký elementární řez $S(A, V \setminus A)$ takový, že $z \in A$. Pro velikost toku f potom platí

$$w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) \le f(A, V \setminus A) \le c(A, V \setminus A).$$

V řezu R jsou oproti elementárnímu řezu $S(A, V \setminus A)$ nějaké hrany dokonce navíc, takže máme $c(A, V \setminus A) \le c(R)$. □

Teď zavedeme klíčový pojem nasycené cesty. Dosud jsme mluvili o *orientovaných* cestách (a také jsme to pečlivě zdůrazňovali). Po zbytek této kapitoly budeme *cestou* rozumět posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m)$, kde $v_0, \ldots, v_m$ jsou navzájem různé vrcholy uvažované sítě, a pro každé i je $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ nebo $e_i = (v_i, v_{i-1})$. Ignorujeme tedy orientaci hran a například cesta ze zdroje do stoku (o takových budeme nyní hlavně hovořit) může vypadat třeba takto:



Definice. Cesta v právě uvedeném smyslu se nazývá *nasycená* (vzhledem k danému toku f), pokud pro nějakou hranu $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ orientovanou po směru je $f(e_i) = c(e_i)$ nebo pro nějakou hranu $e_i = (v_i, v_{i-1})$ orientovanou proti je $f(e_i) = 0$. Cestě, která není nasycená, budeme říkat *nenasycená*. Nenasycené cestě ze zdroje do stoku také často říkáme (hlavně v popisu algoritmů) *zlepšující cesta*.[2] Tok na-

[2] Z anglického *augmenting path*.

zveme nasycený, když každá cesta ze zdroje do stoku je nasycená.

Nasycená cesta je tedy taková, podél níž se tok nedá zvětšit. Nyní ukážeme důležité vlastnosti maximálního toku.

Tvrzení. *Tok f je maximální, právě když je nasycený. Pro každý maximální tok f existuje řez R takový, že $w(f) = c(R)$.*

Důkaz. Nejdřív sporem dokážeme, že maximální tok je nasycený. Nechť je f maximální a přesto nenasycený. Potom existuje zlepšující cesta P. Nyní najdeme možné vylepšení toku ve směru ze zdroje do stoku

$$\varepsilon_1 = \min\{c(e) - f(e);\ e \in P \text{ orientovaná po směru}\}$$

a vylepšení proti směru

$$\varepsilon_2 = \min\{f(e);\ e \in P \text{ orientovaná proti směru}\}$$

a vezmeme menší z nich: $\varepsilon_P = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Cesta P je nenasycená, proto $\varepsilon_P > 0$. Stávající tok f změníme na následující tok f':

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon_P & e \in P \text{ orientovaná ve směru ze zdroje do stoku} \\ f(e) - \varepsilon_P & e \in P \text{ orientovaná proti směru} \\ f(e) & e \notin P. \end{cases}$$

Díky volbě ε_P se nepřekročí kapacity hran a $f'(e)$ nebude nikdy záporné. Protože v rámci jednoho vrcholu z cesty P se číslo ε_P přičte i odečte, zůstane v platnosti i Kirchhoffův zákon. Máme tedy korektní nový tok f' a zároveň $w(f') = \sum f'(z,x) - \sum f'(x,z) = w(f) + \varepsilon_P$, tedy dokonce lepší tok než f. Tok f nebyl maximální, což je spor.

Nyní dokážeme, že je-li tok f nasycený, pak je maximální. Zvolíme množinu A takových vrcholů v, že existuje nenasycená cesta ze zdroje do v. Tok je nasycený, bude tedy $z \in A$, ale $s \notin A$. Pro každou hranu $e \in S(A, V \setminus A)$ platí $f(e) = c(e)$ a pro každou hranu $e \in S(V \setminus A, A)$ platí $f(e) = 0$.

Velikost toku je

$$w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = c(A, V \setminus A) - 0 = c(A, V \setminus A).$$

Víme, že vždy $w(f) \le c(R)$ pro každý tok f i řez R, a my jsme zde dokonce nyní našli řez R takový, že $w(f) = c(R)$. Tok f tedy určitě bude největší možný. Zároveň jsme zkonstruovali řez R, pro který platí rovnost $w(f) = c(R)$. $\square$

Pozorný čtenář si možná všiml, že už jsme dokázali celou hlavní větu o tocích: Víme, že pro danou síť existuje maximální tok f, podle druhé části právě dokázaného tvrzení k němu existuje řez o kapacitě $w(f)$, a ten je nutně minimální.

2.3 Fordův–Fulkersonův algoritmus.

Důkaz hlavní věty o tocích dává jednoduchý algoritmus na hledání maximálního toku.

Algoritmus (Ford, Fulkerson).

(1) Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e.
(2) Pokud existuje zlepšující cesta P, najdi ε_P jako v důkazu předchozí věty, vylepši cestu P a opakuj tento bod tak dlouho, dokud nějaká nenasycená cesta existuje.
(3) Stávající f je maximálním tokem.

Když je možných zlepšujících cest více, záměrně jsme nezmínili, jakou přesně vybrat, ani přesnou implementaci jejich hledání. Prozatím předpokládejme, že algoritmus vybírá naprosto libovolnou zlepšující cestu.

Pozorování. *Jsou-li všechny kapacity v síti racionální čísla, je Fordův–Fulkersonův algoritmus konečný. Pro síť s racionálními kapacitami tedy dokazuje existenci maximálního toku. Navíc maximální tok vypočtený Fordovým–Fulkersonovým algoritmem je racionální, respektive celočíselný pro celočíselné kapacity.*

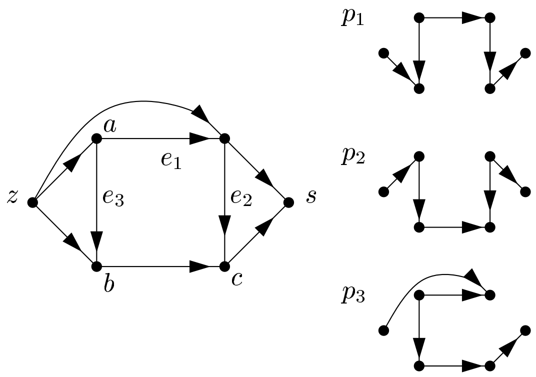
Důkaz. Po případném vynásobení všech kapacit jejich společným jmenovatelem můžeme předpokládat, že kapacity jsou dokonce celočíselné. Potom ε v algoritmu bude vždy alespoň 1, a velikost toku se tudíž zvýší v každém kroku alespoň o 1. Algoritmus proto nutně skončí, a tedy najde nasycený tok, jenž je i maximální.

Algoritmus v průběhu své činnosti čísla pouze sčítá, takže ve výsledném toku nemohou vzniknout jiná čísla než celá, tedy po vydělení společným jmenovatelem racionální. □

To, že v každé celočíselně ohodnocené síti je maximální tok celočíselný, se výborně hodí pro nejrůznější aplikace existenčního charakteru, jako například hledání párování v bipartitních grafech, a podobně.

Bohužel existuje síť ohodnocená iracionálními čísly, na níž Fordův–Fulkersonův algoritmus nedoběhne, a dokonce ani nebude konvergovat ke správnému výsledku.

Příklad. První příklad sítě, kde Fordův–Fulkersonův algoritmus neskončí, podali sami autoři algoritmu. My si ukážeme podstatně jednodušší síť navrženou Uri Zwickem, na které lze simulovat výpočet členů posloupnosti $\{a_n\}$ definované $a_0 = 1$, $a_1 = r$ a $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, kde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Protože $r^2 = 1 - r$, přenásobením obou stran rovnice číslem r^n dostaneme $r^{n+2} = r^n - r^{n+1}$, platí tedy $a_n = r^n$. Vezmeme následující síť a cesty p_1, p_2 a p_3:



Kapacity nastavíme takto: $c(e_1) = a_0 = 1$, $c(e_2) = a_1 = r$, $c(e_3) = 1$ a ostatním hranám přiřadíme nějakou dostatečně velkou kapacitu M. Maximální tok v naší síti je zřejmě $2M$.

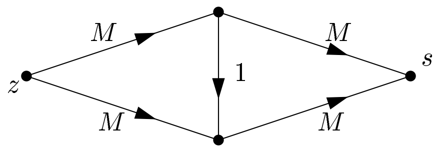
Začneme s nulovým tokem a jako první cestu použijeme (z, a, b, c, s). Ta nastaví na hrany e_1, e_2, e_3 po řadě tok $(0, 0, 1)$ a aktuální velikost toku tedy bude 1. Následně budeme opakovaně používat posloupnost zlepšujících cest p_1, p_2, p_1, p_3. Jak se v průběhu každé iterace mění reziduální kapacity (tj. to, co chybí k plnému nasycení hrany) hran e_1, e_2, e_3:

$$(a_n, a_{n+1}, 0) \to (a_{n+2}, 0, a_{n+1}) \to (a_{n+2}, a_{n+1}, 0) \to$$

$$\to (0, a_{n+3}, a_{n+2}) \to (a_{n+2}, a_{n+3}, 0).$$

V každé iteraci se tak tok zvětší o $2a_n + 2a_{n+1}$ a jeho vylepšování se nikdy nezastaví. Navíc jeho velikost bude konvergovat k hodnotě $1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 3$, což je menší než hodnota maximálního toku.

Příklad. Ani v celočíselných sítích Fordův–Fulkersonův algoritmus nepoběží příliš rychle. Pokud v následující síti (kde za M zvolíme nějaké hodně velké číslo) bude střídavě vylepšovat obě cesty délky tři, tak potom poběží v čase úměrném M.



Existují mnohem rafinovanější algoritmy, konečné a rychlejší, ty však nepatří do tohoto textu. Některé z nich jsou variantami původního Fordova–Fulkersonova algoritmu, v nichž se zlepšující cesty volí nějakou pokročilejší metodou. Poznamenejme jen, že pokud v každém kroku Fordova–Fulkersonova algoritmu použijeme *nejkratší* možnou zlepšující cestu, skončí algoritmus pro libovolné reálné kapacity, a dokonce v počtu kroků, omezeném polynomiální funkcí počtu hran sítě.

2.4 Toky v sítích a lineární programování.

S toky v sítích se dá zacházet také z pohledu lineární algebry. *Cirkulace* v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je libovolná funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující v každém vrcholu Kirchhoffův zákon:

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x, v) - \sum_{(v,x)\in E} f(v, x) = 0.$$

Tuto podmínku můžeme stručně zapsat jako $D_G f = 0$. Zde D_G je *matice incidence* orientovaného grafu G: řádky jsou indexovány vrcholy, sloupce hranami, a prvek matice na pozici (v, e) je $+1$ pokud v je počáteční vrchol e, -1 pokud v je koncový vrchol e, a 0 jinak. Přitom f zde chápeme jako sloupcový vektor indexovaný hranami.

Tok v síti obecně není cirkulace, protože Kirchhoffův zákon se nepožaduje pro zdroj ani pro stok. Jednoduchým trikem ale můžeme z každého toku udělat cirkulaci v upraveném grafu. Mějme síť (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $(s, z) \notin E$. Definujeme nový orientovaný graf $G' = (V, E')$, kde $E' = E \cup \{(s, z)\}$ vznikne z E přidáním hrany (s, z). Položíme také kapacitu $c(s, z)$ rovnu „dostatečně velkému číslu“, čili například součtu kapacit všech ostatních hran. Je-li dán libovolný tok f v původní síti, definujeme cirkulaci f' na G': $f'(e) = f(e)$ pro $e \in E$, a $f'(s, z) = w(f)$. Je snadné si rozmyslet, že hledání maximálního toku v síti je ekvivalentní hledání takové cirkulace f' v grafu G', jejíž hodnota na každé hraně je mezi 0 a $c(e)$, a jež maximalizuje $f'(s, z)$.

Tato nová formulace umožňuje zapsat úlohu maximálního toku jako úlohu *lineárního programování*, tj. úlohu nalézt řešení dané soustavy lineárních rovnic a nerovnic, které maximalizuje danou lineární funkci. Konkrétně, úloha maximálního toku je ekvivalentní úloze

$$\max\{f'(s,z);\ f' \in \mathbb{R}^{|E'|},\ D_{G'}f' = 0,\ f' \leq c,\ f' \geq 0\}.$$

Zde opět interpretujeme f' a c jako $|E'|$-složkové reálné vektory, a rovnost či nerovnost mezi vektory znamená rovnost či nerovnost po složkách.

Řešením obecných úloh lineárního programování se zabývá dobře vyvinutá teorie. Z vět této teorie se dá odvodit i většina výsledků o tocích, například hlavní věta či existence maximálního toku. I spousta dalších výsledků v kombinatorice, zejména v kombinatorické optimalizaci, souvisí s lineárním programováním.

2.5 Existence maximálního toku.

Na závěr ještě slíbený důkaz existence maximálního toku i v iracionálně ohodnocených sítích. Další možné důkazy plynou z vět teorie lineárního programování či vlastností Fordova–Fulkersonova algoritmu vybírajícího nejkratší zlepšující cestu.

Důkaz existence maximálního toku. Většinu tíhy důkazu (který bude spíše technického rázu) převedeme na větu ze základního kurzu matematické analýzy, která říká, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima. Stačí tedy ověřit, že množina všech toků

$$\mathcal{F} = \{f;\ f \text{ je tok}\} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$$

je kompaktní a že funkce $w\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Množina $\mathcal{F}$ je podmnožinou $|E|$-rozměrného euklidovského prostoru, protože každý tok se dá zapsat jako $|E|$-složkový vektor.

Spojitost w. Zadefinujeme *projekce* $\pi_e\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jako $\pi_e(f) = f(e)$, čili sadu funkcí pro každou hranu vracejících hodnotu $f(e)$, a uvědomíme si, že všechny projekce π_e jsou spojité. Projekce π_e se dá totiž představit jako skalární součin vektorů f a $(0,\dots,0,1,0,\dots)$, kde 1 je na pozici hrany e. Spojitost skalárního součinu se snadno ověří přímo z definice. Na velikost toku

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = \sum_{(z,x)\in E} \pi_{(z,x)}(f) - \sum_{(x,z)\in E} \pi_{(x,z)}(f)$$

se lze pro danou síť dívat jako na lineární kombinaci konečného počtu projekcí, a je tedy též spojitá.

Kompaktnost $\mathcal{F}$. Připomeňme, že v euklidovském prostoru je množina kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Množina $\mathcal{F}$ se dá uzavřít do krabičky $\prod_{e\in E}[0,c(e)]$, je tedy omezená. Pro každý vrchol u definujeme množinu $\mathcal{F}_u$ toků $f \in \mathbb{R}^{|E|}$ a zároveň podobně jako v předchozím odstavci zavedeme vrcholovou projekci π_u:

$$\mathcal{F}_u = \left\{ f;\ \overbrace{\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u)}^{\pi_u(f)} = 0 \right\} = \{f;\ \pi_u(f) = 0\} = \pi_u^{-1}(\{0\})$$

Projekce π_u je opět spojitá, protože je lineární kombinací konečného počtu spojitých hranových projekcí. Nyní použijeme trik z matematické analýzy. Platí věta, že vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení je opět uzavřená množina. Projekce π_u spojitá je a jednoprvková množina $\{0\}$ skutečně je uzavřená. A množina $\mathcal{F}$ je uzavřená, neboť

$$\mathcal{F} = \bigcap_{u \in V \setminus \{z,s\}} \mathcal{F}_u \cap \prod_{e \in E} [0, c(e)]$$

a průniky i konečná sjednocení uzavřených množin jsou opět uzavřené množiny. $\square$

3. Míra souvislosti grafů

Graf můžeme rozdělit (znesouvislit) jak odebráním hran, tak odebráním vrcholů. Budeme zkoumat stupně souvislosti grafu, tedy míru, nakolik je daný graf při odebírání hran, resp. vrcholů odolný proti rozpadnutí.

Definice. *Hranový řez* v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý.

Vrcholový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ (čili *indukovaný podgraf* $G[V \setminus A]$) je nesouvislý.

Pomocí řezů zavedeme dva stupně souvislosti, hranovou a vrcholovou.

Definice. *Hranová souvislost* je

$$k_e(G) = \min\{|F|;\ F \subseteq E \text{ je hranový řez}\}.$$

Vrcholová souvislost je

$$k_v(G) = \begin{cases} \min\{|A|;\ A \subseteq V \text{ je vrcholový řez}\} & \text{pro } G \ncong K_n \\ n-1 & \text{pro } G \cong K_n. \end{cases}$$

U vrcholové souvislosti je třeba zvlášť ošetřit úplné grafy, protože v nich neexistuje vrcholový řez (odebráním libovolné množiny vrcholů se graf nikdy nerozpadne). V souladu s dřívější definicí graf tedy bude hranově (resp. vrcholově) k-souvislý, když je $k_e(G) \geq k$ (resp. $k_v(G) \geq k$). Pokud se odebráním *libovolné* hrany (resp. vrcholu) sníží stupeň souvislosti, říká se také, že graf je *kriticky* hranově (resp. vrcholově) k-souvislý.

Nabízí se přirozená otázka, jak spolu $k_v(G)$ a $k_e(G)$ souvisí. Ukážeme, že pro libovolný graf G je $k_v(G) \leq k_e(G)$. První nápad, vzít za každou hranu z hranového řezu nějaký její vrchol, bohužel nefunguje, není totiž úplně jasné, který konec vybrat, aby vznikl korektní řez. (Viz třeba graf C_4, kde bychom zvolili dva sousední vrcholy.)

K důkazu si nejprve připravíme dvě technická tvrzení říkající vpodstatě to, že odebráním hrany se hranová i vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu.

Lemma. *Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí*

$$k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G).$$

Důkaz. Vezmeme minimální řez F. Množina hran $F' = F \setminus \{e\}$ je potom řezem v grafu $G - e$, ne nutně minimálním, ale každopádně platí

$$k_e(G - e) \leq |F'| \leq |F| = k_e(G).$$

Dále vezmeme minimální hranový řez B v grafu $G - e$. Potom $B' = B \cup \{e\}$ bude řezem v grafu G, čili

$$k_e(G) \leq |B'| = |B| + 1 = k_e(G - e) + 1.$$

□

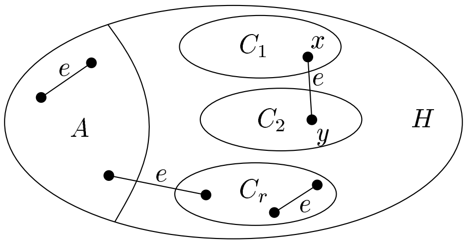
Lemma. *Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí*

$$k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G).$$

Důkaz. Úlohu mírně přeformulujeme, budeme dokazovat pro graf $H = G - e$ nerovnost

$$k_v(H + e) \leq k_v(H) + 1.$$

V grafu H existuje vrcholový řez $A \subseteq V(H)$ takový, že $k_v(H) = |A|$. Při odebrání řezu A se graf H rozpadne na alespoň dvě komponenty $C_1, \dots, C_r$. Rozebereme možnosti, odkud pochází hrana e:



(1) Alespoň jeden vrchol hrany e leží v řezu A. Přidáním hrany tedy nespojíme dohromady žádné komponenty, množina A bude stále řezem a tak

$$k_v(H + e) \leq |A| = k_v(H).$$

(2) Hrana e je celá uvnitř nějaké komponenty. Stejný argument.

(3) Hrana $e = \{x, y\}$ spojuje dvě komponenty, dejme tomu $x \in C_1$ a $y \in C_2$. Když jsou komponenty alespoň tři, je vše v pořádku, protože po přidání e se spojí jen dvě komponenty a množina A zůstane řezem. Ať jsou nadále komponenty pouze dvě. Nejdříve řešme případ, kdy komponenty C_1 a C_2 nejsou obě jednoprvkové, a ať je C_1 ta větší.

Množina $A' = A \cup \{x\}$ bude vrcholovým řezem grafu $H + e$, protože C_2 a $C_1 \setminus \{x\}$ jsou komponenty souvislosti grafu $(H + e) \setminus A'$. Potom platí

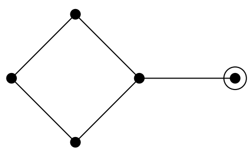
$$k_v(H + e) \leq |A'| \leq |A| + 1 = k_v(H) + 1.$$

Zbývá dořešit speciální případ, kdy jsou komponenty C_1 a C_2 jednoprvkové. Všech vrcholů je pak celkem $|V| = |A| + 2$ a spočítáme, že

$$k_v(H + e) \leq |V| - 1 = |V| - 2 + 1 = k_v(H) + 1.$$

□

Bylo by hezké, kdyby podobné lemma platilo i pro odebírání vrcholu, jenže ačkoli se vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu, může také vzrůst, třeba zde:



Věta. *Pro každý graf G platí*

$$k_v(G) \leq k_e(G).$$

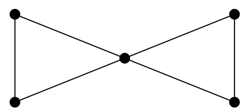
Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu hran. Je-li hran méně než $|V| - 1$ (tedy vrcholy nejsou pokryty ani stromem a graf je nesouvislý), bude zjevně $k_e(G) = k_v(G) = 0$. Nechť nadále $k_e(G) > 0$.

Vezmeme nejmenší hranový řez F a jeho jednu hranu e a na graf $G' = G - e$ použijeme indukční předpoklad. Dostaneme tak

$$k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_e(G - e) = k_e(G) - 1.$$

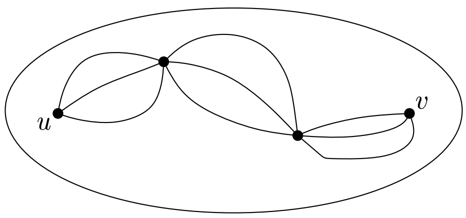
Odtud a z pomocných lemmat máme $k_v(G) \leq k_e(G)$. □

Máme-li potíže se zapamatováním, kterým směrem vlastně nerovnost mezi stupněm vrcholové a hranové souvislosti platí, stačí si nakreslit motýlka:



Pro tento graf je $k_v = 1$ ale $k_e = 2$, druhý směr nerovnosti tak neplatí.

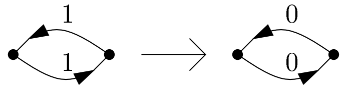
Věta (Ford, Fulkerson). *Pro každý graf G a každé přirozené t platí $k_e(G) \geq t$, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy u a v existuje alespoň t hranově disjunktních cest.*



Důkaz. Implikaci zprava doleva ukážeme sporem, nechť existuje hranový řez F menší než t. Po rozdělení grafu vezmeme dva vrcholy u a v ležící v různých komponentách souvislosti. Jenže mezi nimi vedlo t hranově disjunktních cest, řez F tedy na jejich rozpojení nemohl stačit.

V druhém směru použijeme skutečnosti dokázané o tocích v síti. Mějme tedy graf G takový, že $k_e(G) \geq t$, a pro dva vrcholy u a v hledáme hranově disjunktní cesty. Sestrojíme z grafu G síť $G' = (V(G), \{(x, y), (y, x);\ \{x, y\} \in E(G)\}, u, v, \mathbf{1})$ tak, že oboustranně zorientujeme původní hrany, za zdroj zvolíme vrchol u, za stok vrchol v a kapacity všech hran nastavíme na 1. Pak spustíme Fordův–Fulkersonův algoritmus hledání maximálního toku.

Nalezený tok bude celočíselný, tedy po hranách poteče 0 nebo 1. Provedeme ovšem ještě drobnou úpravu – když po obou hranách (a, b) i (b, a) teče jednička, nastavíme obě na nulu, velikost toku se tím nezmění:



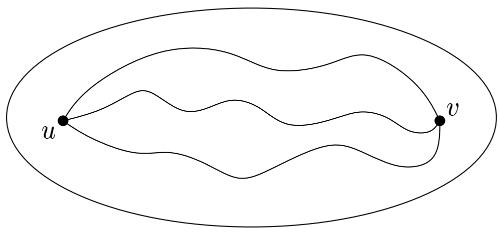
Podle hlavní věty o tocích k našemu maximálnímu toku f potom existuje minimální řez R.

Množina $F = \{\{x,y\};\ (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}$ je hranový řez v grafu G. Protože G je hranově t-souvislý, bude podle definice souvislosti i velikost řezu $|F| \geq t$. Jelikož za každou hranu z řezu R jsme do množiny F zařadili nejvýše jednu hranu, bude též $|R| \geq |F| \geq t$. Velikost toku f tak musí být alespoň t.

Zbývá pomocí toku f zkonstruovat hranově disjunktní cesty z u do v. Existenci cest v G' ukážeme induktivně. Má-li tok velikost 1, jistě nalezneme cestu z u do v, kde na každé hraně teče jednička. Ve větším toku najdeme libovolnou jedničkovou cestu z u do v a hrany na ní vynulujeme. Ohodnocení hran tak zůstane tokem a jeho velikost se tím sníží o 1. Existence zbývajících cest plyne z indukce. Na závěr už jen ke každé nalezené orientované cestě v G' vezmeme příslušnou neorientovanou cestu v G. □

Podobné tvrzení, jako je Fordova–Fulkersonova věta, platí i pro vrcholovou souvislost.

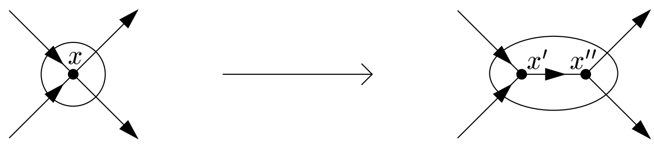
Věta (Menger). *Pro každý graf G a každé přirozené t platí $k_v(G) \geq t$, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy u a v existuje alespoň t cest, které jsou až na vrcholy u a v disjunktní.*



Důkaz. Nejprve implikaci zprava doleva, nechť mezi každými dvěma vrcholy grafu G existuje t disjunktních cest. Kdyby G měl vrcholovou souvislost menší než t, potom by buď musel obsahovat vrcholový řez velikosti menší než t, nebo by to musel být úplný graf s nejvýš t vrcholy. První možnost nenastane, protože na rozpojení t disjunktních cest je třeba řez velikosti alespoň t, a druhá možnost také nenastane, poněvadž v K_t nemáme t cest mezi dvěma vrcholy.

Nyní dokážeme obrácenou implikaci. Nechť je G vrcholově t-souvislý, uvážíme libovolné dva vrcholy u a v. Nejprve nechť $\{u,v\} \notin E(G)$.

Hrany grafu symetricky zorientujeme, tj. nahradíme každou původní hranu hranami tam a zpátky. Výjimku budou tvořit hrany obsahující u, ty povedou pouze z vrcholu u, a hrany obsahující v, ty povedou pouze do vrcholu v. Nyní všechny vrcholy vyjma u a v takto podrozdělíme:



Formálně zapsáno, utvoříme nový graf G' takový, že

$$V(G') = \{x', x'';\ x \in V(G),\ u \neq x \neq v\} \cup \{u'', v'\}$$
$$E(G') = \{(x'', y'), (y'', x');\ \{x,y\} \in E(G)\} \cup \underbrace{\{(x', x'');\ x \in V(G),\ u \neq x \neq v\}}_{F},$$

kde množinu hran vedoucích uvnitř podrozdělených vrcholů označíme jako F. Hrany vzniklé rozdělením vrcholu tak vlastně „simulují“ vrchol grafu G, je tu korespondence mezi hranami z F a vrcholy grafu G.

Kapacity všech hran v grafu G' nastavíme na 1, za zdroj a stok vezmeme vrcholy u'' a v' a nalezneme mezi nimi maximální tok. K němu bude existovat minimální (hranový) řez R. K tomuto R najdeme řez $R' \subseteq F$, $|R'| \leq |R|$: Každou hranu $e \in R \setminus F$ nahradíme takovou hranou $e' \in F$, která má s e společný vrchol. Jediný případ, kdy by ani na jeden vrchol hrany e nenavazovala žádná hrana $e' \in F$ vzniklá podrozdělením vrcholu, by mohl nastat pro $e = (u'', v')$, ale tuto hranu jsme na začátku důkazu zakázali. Když bude R' dostatečně velký (tj. $|R'| \geq t$), stejným postupem jako při důkazu Fordovy–Fulkersonovy věty v G' nalezneme t hranově disjunktních cest z u do v.

Pro spor předpokládejme, že existuje nějaký řez $R' \subseteq F$ takový, že $|R'| < t$. Uvážíme množinu $A = \{x;\ (x', x'') \in R\}$, která bude vrcholovým řezem grafu G, neboť v $G \setminus A$ nevede žádná cesta mezi u a v. Jenže G je vrcholově t-souvislý a není úplný, dostaneme tak $t \leq |A| = |R'| < t$.

A ještě zbývá zkonstruovat vrcholově disjunktní cesty v grafu G: Pro cestu $(u'', x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots, v')$ v grafu G' vezmeme cestu $(u, x_1, x_2, \ldots, v)$. Kdyby se dvě takové cesty protínaly v nějakém x_i, musely by se protínat i původní cesty v hraně (x_i', x_i'').

Tím je důkaz hotov pro případ $\{u, v\} \notin E(G)$. Když $\{u, v\} \in E(G)$, uvážíme graf $G - \{u, v\}$. Ten má vrcholovou souvislost aspoň $t - 1$ (protože odebráním hrany se vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu), a podle právě dokázaného tvrzení v něm najdeme $t - 1$ vrcholově disjunktních cest mezi u a v. K nim přidáme hranu $\{u, v\}$ jako t-tou cestu. □

4. Systémy různých reprezentantů

Definice. Nechť X a I jsou množiny. *Množinovým systémem nad* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i, i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. (V množinovém systému podle této definice se tedy táž množina může několikrát opakovat.)

Systém různých reprezentantů (SRR) je funkce $f\colon I \to X$ taková, že

(1) pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$
(2) f je prosté.

Jinými slovy, SRR je výběr jednoho prvku z každé množiny M_i takový, že všechny vybrané prvky jsou navzájem různé. Obecně se uvažují nekonečné systémy, my budeme zkoumat pouze systémy konečné. Nechť jsou tedy navíc množiny X, $I \subset \mathbb{N}$ a M_i konečné.

Definice. *Párování* v grafu G je množina hran $F \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol grafu G patří nejvýše do jedné hrany z F.

Další ekvivalentní definicí párování je třeba to, že hrany v párování jsou disjunktní množiny nebo také že stupeň vrcholu v grafu obsahujícím pouze párovací hrany je nejvýše 1.

Definice. *Incidenčním grafem množinového systému* $\mathcal{M}$ nazveme bipartitní graf

$$B_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\};\ x \in M_i\}).$$

Pozorování. *Systém různých reprezentantů v* $\mathcal{M}$ *existuje, právě když v incidenčním grafu* $B_{\mathcal{M}}$ *existuje párování velikosti* $|I|$.

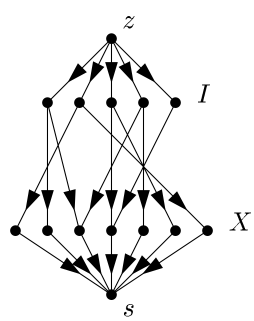
Následující věta je příkladem tvrzení, kde se zřejmá nutná podmínka ukáže být i podmínkou postačující.

Hallova věta. *Systém různých reprezentantů v* $\mathcal{M}$ *existuje, právě když pro každou* $J \subseteq I$ *je* $|\bigcup_{i\in J} M_i| \geq |J|$*; tato podmínka se nazývá Hallova.*

Důkaz. Začneme jednodušší implikací. Nechť v $\mathcal{M}$ existuje systém různých reprezentantů, chceme ukázat, že platí Hallova podmínka. Zvolíme libovolnou $J \subseteq I$. Pro každý index $j \in J$ existuje prvek p_j z množiny M_j tak, že všechny prvky p_j jsou navzájem různé. Proto

$$\Big|\bigcup_{j\in J} M_j\Big| \geq |\{p_j;\ j \in J\}| = |J|.$$

Nyní dokažme implikaci obrácenou. Mějme množinový systém $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku. Vezmeme bipartitní graf $B_{\mathcal{M}}$ a uděláme z něj síť:



Přesněji zapsáno, sestrojíme síť $S = (G, z, s, \mathbf{1})$, kde

$$V(G) = \{z, s\} \cup I \cup X$$
$$E(G) = \{(z, i);\ i \in I\} \cup \{(i, x);\ i \in I, x \in M_i\} \cup \{(x, s);\ x \in X\}.$$

Kapacity hran nastavíme na 1 a nalezneme Fordovým–Fulkersonovým algoritmem maximální tok g. V kapitole o tocích jsme dokázali, že takový tok bude celočíselný. K toku g existuje minimální řez R'. Pro další průběh důkazu bude potřeba se v řezu R' zbavit hran mezi I a X, aniž by se řez zvětšil. Vyrobíme tedy řez

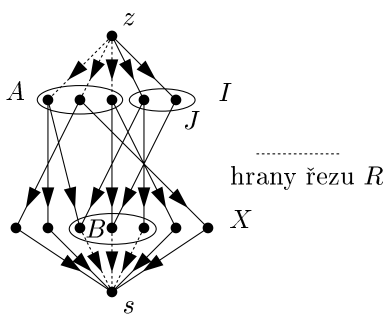
$$R = \{(x, s);\ (x, s) \in R'\} \cup \{(z, i);\ (z, i) \in R'\} \cup \{(z, i);\ (i, x) \in R'\}.$$

Vyjádřeno slovy, když v R' byla hrana (i, x) mezi množinami I a X, zaměníme ji za odpovídající hranu (z, i); rozpojíme tak totiž stejnou cestu jako hranou (i, x).

Označíme

$$A = \{i;\ (z, i) \in R\}, \quad B = \{x;\ (x, s) \in R\}, \quad J = I \setminus A.$$

Nakresleno



Protože R je řez, hrany z J vedou jen do B, a tedy

$$\bigcup_{j \in J} M_j \subseteq B.$$

Jaká bude velikost řezu R?

$$c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \geq |I| - |J| + \Big|\bigcup_{j \in J} M_j\Big|.$$

Nyní použijeme Hallovu podmínku, která říká, že $|\bigcup_{j \in J} M_j| \geq |J|$, a dostaneme

$$c(R) \geq |I| - |J| + |J| = |I|.$$

Tok g tak bude mít velikost alespoň $|I|$.

Zbývá říci, co je hledaným systémem různých reprezentantů. Jsou jím prostě prvky množiny X takové, že do nich tokem g teče jednička. Formálně, SRR bude funkce f, kde pro každé $i \in I$

$$f(i) = x \quad \text{takové, že} \quad g(i, x) = 1.$$

□

Hallova věta má celou řadu nejrůznějších aplikací, a proto stojí za to si ji zapamatovat. Předvedený důkaz není jediným možným, větu lze dokázat i přímo matematickou indukcí bez použití toků. Nebo ji lze odvodit z Tutteovy věty, kterou vysvětlíme později.

Poznámka. Předpokládáme-li v teorii množin axiom výběru, lze dokázat variantu Hallovy věty, kde sice množiny M_i musí být konečné, ale množiny I a X mohou být nekonečné, dokonce nespočetné. Důkaz už je však poněkud složitější.

Když jsou X a I nekonečné (stačí spočetné) a povolíme nekonečné velikosti (taktéž stačí spočetné) množin M_i, analogie Hallovy věty neplatí. Stačí zvolit $X = \mathbb{N}$, $M_1 = X$ a ostatní M_i jsou všechny jednoprvkové podmnožiny množiny X. Zde systém různých reprezentantů nelze sestrojit.

4.1 Důsledky Hallovy věty.

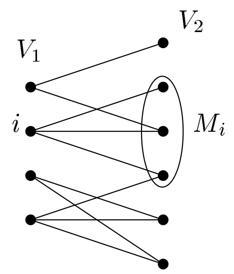
Předvedeme několik základních důsledků Hallovy věty. Velmi užitečné je především následující:

Tvrzení. *V bipartitním grafu $B = (V_1 \cup V_2, E)$ s neprázdnou množinou hran E takovém, že pro libovolné dva vrcholy $x \in V_1$ a $y \in V_2$ platí $\deg_B x \geq \deg_B y$, existuje párování, které má velikost $|V_1|$ („uspokojuje část V_1“).*

Důkaz. Definujeme množinový systém $\mathcal{M} = (M_i, i \in I)$ nad V_2 takový, že $I = V_1$ a

$$M_i = \{x \in V_2;\ \{i, x\} \in E(B)\}.$$

Obrázkem:



Když o systému dokážeme, že v něm platí Hallova podmínka, bude v něm existovat systém různých reprezentantů. Tedy pro každý $i \in V_1$ bude existovat $x \in V_2$ tak, že mezi nimi povede hrana, a všechna x budou navzájem různá. Ale to je přesně definice párování, které plně uspokojuje část V_1.

Zvolíme libovolné $J \subseteq V_1$ a buď $B(J) = \{x \in V_2; \{i, x\} \in E(B)\}$ množina všech sousedů J v grafu B. Hallova podmínka požaduje, aby $|B(J)| \geq |J|$, což nyní ověříme. Označme $k_1 = \min_{j \in J}(\deg_B j)$ a $k_2 = \max_{x \in B(J)}(\deg_B x)$. Počet hran mezi J a $B(J)$ je přinejmenším $k_1|J|$, a také nanejvýš $k_2|B(J)|$, takže $k_1|J| \leq k_2|B(J)|$. Protože podle předpokladu tvrzení platí $k_1 \geq k_2$, dostáváme i $|J| \leq |B(J)|$. Tím je důkaz tvrzení hotov. □

Definice. *Latinský čtverec* A je čtvercová matice typu $n \times n$ taková, že

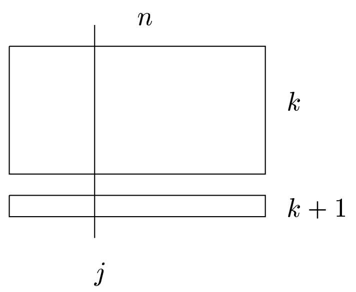
(1) $a_{ij} \in \{1, 2, \ldots, n\}$
(2) $a_{ij} \neq a_{i'j}$ pro každé j a $i \neq i'$
(3) $a_{ij} \neq a_{ij'}$ pro každé i a $j' \neq j$.

Latinský obdélník A je matice typu $k \times n$, splňující stejné podmínky (1)–(3).

V každém řádku a sloupci latinského čtverce či obdélníku se tedy vyskytují jen navzájem různá čísla.

Tvrzení. *Každý latinský obdélník, kde počet řádků k je nižší než počet sloupců n, lze doplnit na latinský čtverec.*

Důkaz. K latinskému obdélníku budeme postupně přidávat další a další řádky, dokud jich nebude n.



Sestrojíme bipartitní graf $G = (S \cup H, E)$, kde $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ je množina sloupců latinského obdélníku a $H = \{1, \ldots, n\}$ je množina hodnot, ze kterých konstruujeme $(k+1)$-ní řádek. Hrana vede mezi s_i a x, pokud se hodnota x nevyskytuje v i-tém sloupci, tedy

$$E = \{\{s_i, x\};\ x \notin s_i\}.$$

Nyní chceme do nového řádku na j-tou pozici vybrat takový prvek x, že x se jednak nevyskytuje v sloupci s_j a jednak všechny takto vybrané prvky x jsou navzájem různé. To je ale ekvivalentní s existencí párování v grafu G, které plně uspokojuje část S.

Jaké stupně vrcholů mají jednotlivé části grafu G? V latinském obdélníku o k řádcích chybí v každém sloupci $n - k$ hodnot, proto $\deg_G s_i = n - k$ pro každý $s_i \in S$.

Naopak, v kolika sloupcích může chybět prvek x? V každém z k řádků se vyskytuje právě jednou, a pokaždé v jiném sloupci. Obsadí tedy k sloupců a chybět bude v $n - k$ sloupcích. To znamená, že $\deg_G x = n - k$ pro každý $x \in H$. Podle předchozího tvrzení existuje párování uspokojující část S. $\square$

5. Párování v obecných grafech

Hezkým příkladem na párování je problém hlídkujících strážníků. Strážníci hlídkují vždy po dvojicích a každý strážník je ochoten spolupracovat pouze s některými kolegy, s ostatními se nesnese. Každý strážník je reprezentován vrcholem grafu a hrana vede do každého snesitelného kolegy.

Zločin chceme samozřejmě potlačovat v co největší míře, a tedy nás zajímá, jaký největší počet strážníků může sloužit (a kdo s kým), a za jakých podmínek mohou být na obchůzce úplně všichni.

5.1 Perfektní párování a Tutteova věta.

Definice. Párování M v grafu G nazveme *perfektní*, pokud $|M| = \frac{|V(G)|}{2}$. Počet komponent souvislosti grafu G, které mají lichou velikost, označíme symbolem $C_\ell(G)$.

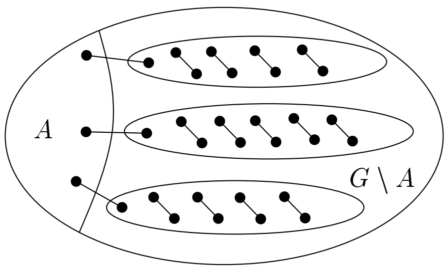
Věta (Tutte). *Graf G má perfektní párování, právě když pro každou $A \subseteq V(G)$ je $C_\ell(G \setminus A) \leq |A|$; tato podmínka se nazývá Tutteova.*[3]

Než přistoupíme k důkazu, bude se nám hodit následující:

Lemma (o třešničce). *Graf G je disjunktním sjednocením úplných grafů, právě když G neobsahuje $K_{1,2}$ (neboli „třešničku") jako indukovaný podgraf.*

Důkaz. Pokud je G disjunktním sjednocením úplných grafů, triviálně nemůže obsahovat $K_{1,2}$. Naopak obměnou, nechť G není disjunktní sjednocením úplných grafů, chceme ukázat, že obsahuje $K_{1,2}$. Existuje tedy komponenta souvislosti C a v ní dva vrcholy x a y takové, že mezi nimi nevede hrana. Vrcholy x a y jsou v C nutně propojené cestami, nechť P je (některá) nejkratší z nich. Délka P je aspoň 2, a každé tři po sobě jdoucí vrcholy a, b, c na P tvoří $K_{1,2}$ (protože kdyby $\{a, c\}$ byla hrana, cesta P by šla zkrátit vynecháním b). $\square$

Důkaz Tutteovy věty. Nejprve nechť v grafu G existuje perfektní párování. Pro libovolnou množinu $A \subseteq V(G)$ tak v grafu $G \setminus A$ vzniknou nějaké komponenty souvislosti, zajímat nás ale budou jen komponenty liché velikosti. Ať bylo perfektní párování jaké chtělo, v každé liché komponentě přebývá alespoň jeden vrchol, který nutně musel být spárován s nějakým vrcholem z množiny A. Dvě liché komponenty přitom nemohou sdílet stejný vrchol z množiny A, a tedy $C_\ell(G \setminus A) \leq |A|$.



Druhá implikace je složitější. Nechť platí Tutteova podmínka. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu hran, netradičně však v obráceném pořadí, od $\binom{n}{2}$ k 0.

---

[3] Vyslovujeme [*tat*] a [*tatova*].

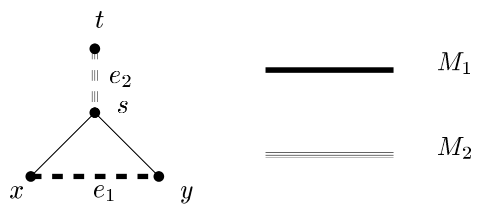
Pro případ úplného grafu K_n je situace jednoduchá. Pro $A = \emptyset$ dostaneme, že n musí být sudé, a tudíž lze jistě v K_n najít perfektní párování.

Nadále předpokládejme, že v grafu G chybí alespoň jedna hrana. Zvolíme množinu W vrcholů takových, že z nich vede hrana do všech ostatních vrcholů grafu G:

$$W := \{u;\ \deg_G u = n - 1\}$$

Jestliže je graf $G \setminus W$ disjunktním sjednocením úplných grafů, dokážeme jednoduše najít perfektní párování. Vrcholy z komponent souvislosti grafu $G \setminus W$ (což jsou úplné grafy) sudé velikosti jistě lze mezi sebou beze zbytku spárovat. V každé liché komponentě nelze spárovat pouze jeden vrchol, množinu všech takových vrcholů označíme V_0. Z Tutteovy podmínky ovšem víme, že $|V_0| = C_\ell(G \setminus W) \leq |W|$, vrcholy V_0 tedy spárujeme s množinou W. Toto je mimochodem jediné místo v důkazu, kde se přímo použije Tutteova podmínka.

Nechť nyní $G \setminus W$ disjunktním sjednocením úplných grafů není. Podle lemmatu o třešničce v něm existuje $K_{1,2}$ jako indukovaný podgraf. Vrcholy tohoto $K_{1,2}$ označíme x, s, y takto:



Ve vrcholu s nutně musí chybět hrana do nějakého vrcholu $t \in V(G)$, jinak by totiž s byl zařazen do množiny W. Označíme $e_1 = \{x, y\}$ jednou barvou a $e_2 = \{s, t\}$ druhou barvou. Ani e_1 ani e_2 nejsou hranami grafu G.

Uvědomíme si, že přidáním libovolné hrany do grafu se Tutteova podmínka neporuší. V $(G + e) \setminus A$ pro libovolnou hranu e a množinu vrcholů A zjevně počet lichých komponent nevzroste. Víme tedy, že oba grafy $G + e_1$ i $G + e_2$ taktéž splňují Tutteovu podmínku. Podle indukčního předpokladu proto v $G + e_1$ existuje perfektní párování M_1 a v $G + e_2$ existuje perfektní párování M_2. Na obrázcích označíme hrany pocházející z M_1 barvou hrany e_1 a hrany pocházející z M_2 barvou hrany e_2. Zadefinujeme množinu hran M jako

$$M := M_1 \div M_2,$$

kde $\div$ značí symetrickou diferenci množin.[4]

S takovou množinou hran platí pro každý vrchol u

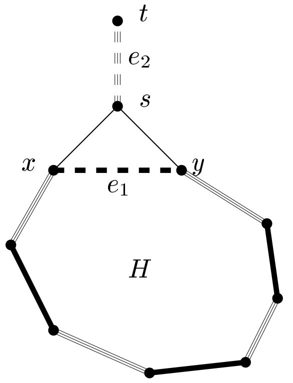
$$\deg_M u = \begin{cases} 0 & \text{když z vrcholu } u \text{ vedly stejné párovací hrany,} \\ 2 & \text{když z vrcholu } u \text{ vedly různé párovací hrany.} \end{cases}$$

Každá komponenta souvislosti v takovém grafu je buďto izolovaný vrchol, nebo kružnice sudé délky, kde se pravidelně střídají hrany obou barev. Označíme H hrany kružnice, na které leží hrana e_1, a rozebereme dva případy. V obou se budeme snažit sestrojit perfektní párování $\widetilde{M}$, jež neobsahuje ani jednu z hran e_1 a e_2, a tedy bude

[4]Čili $M = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$, „xor“ pro informatiky.

vhodné i pro původní graf G. Můžeme nadále předpokládat, že $e_1 \in M_1$ a $e_2 \in M_2$; v opačném případě je M_1, resp. M_2 perfektní párování v G a ukončíme důkaz.

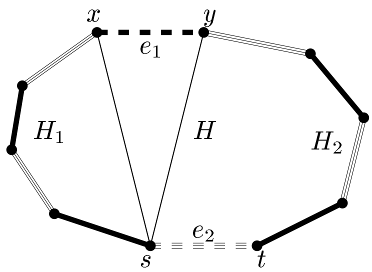
(1) Hrana $e_2 \notin H$.



Na perfektní párování $\widetilde{M}$ mimo kružnici H použijeme M_1, na kružnici H použijeme hrany M_2. Formálně

$$\widetilde{M} := (M_1 \setminus H) \cup (H \cap M_2).$$

(2) Hrana $e_2 \in H$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrcholy s, x, y, t leží na kružnici v pořadí, jaké je zakreslené na obrázku.



Úsek na kružnici H mezi x a s neobsahující y označíme H_1, úsek mezi y a t neobsahující x označíme H_2. Mimo kružnici H lze použít obě párování, užijeme třeba znovu M_1. V úseku H_1 zanecháme pouze hrany M_2, v úseku H_2 pouze hrany M_1. Zbývají spárovat už jen vrcholy y a s. Mezi nimi ovšem vede hrana a tu můžeme zahrnout do párování. Perfektní párování $\widetilde{M}$ tedy je

$$\widetilde{M} := (M_1 \setminus H) \cup (H_1 \cap M_2) \cup (H_2 \cap M_1) \cup \{y, s\}.$$

□

5.2 Maximální párování a Edmondsův algoritmus.

V minulém oddílu jsme charakterizovali grafy mající perfektní párování. Protože ne v každém grafu perfektní párování existuje, bude nás zajímat alespoň párování maximální, tedy pokrývající největší možný počet vrcholů.[5] Ukážeme algoritmus, který pro libovolný graf maximální párování nalezne v polynomiálním čase.

Připravíme si nejprve několik technických prostředků.

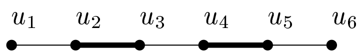
[5] V anglické terminologii se důsledně rozlišuje (a to nejen u párování) „maximum matching", tedy párování pokrývající největší možný počet vrcholů, a „maximal matching" pro největší párování ve smyslu inkluze, tedy párování, ke kterému již nelze přidat žádnou další hranu.

Definice. Nechť M je párování v grafu G. Vrchol $u \in V(G)$ nazveme *volný*, pokud $\deg_M u = 0$. Vrcholu, který není volný, budeme říkat *spárovaný*.

Cestu $u_1, u_2, \dots, u_{2k}$ v grafu G nazveme *volnou střídavou cestou*, pokud

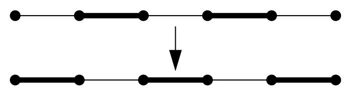
(1) vrcholy u_1 a u_{2k} jsou volné,
(2) hrany $\{u_{2i+1}, u_{2i+2}\} \notin M$,
(3) hrany $\{u_{2i}, u_{2i+1}\} \in M$.

Ilustrace:



Lemma 1. *Párování M je maximální, právě když v grafu neexistuje volná střídavá cesta.*

Důkaz. Když v grafu volná střídavá cesta existuje, párování M jistě není největší:



Tomuto procesu budeme říkat *alternace* volné střídavé cesty.

Nechť naopak M není největší, čili existuje párování M' takové, že $|M'| > |M|$. Definujeme množinu hran $\widetilde{M}$ jako

$$\widetilde{M} = M \div M'.$$

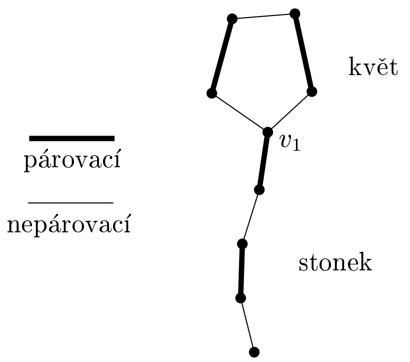
V $\widetilde{M}$ má každý vrchol stupeň 0, 1 nebo 2, komponenty souvislosti této konfigurace jsou kružnice sudé délky a cesty, kde se pravidelně střídají hrany M a M'. Jelikož $|M'| > |M|$, musí existovat komponenta tvaru liché cesty, v níž je hran M' o jednu více, než hran M. Ta tvoří volnou střídavou cestu pro M. $\square$

Definice. Lichou kružnici $C_{2k+1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ grafu G nazveme *květem*, jestliže

(1) vrchol v_1 je na množině hran květu C volný,
(2) hrany $\{v_{2i+1}, v_{2i+2}\} \notin M$,
(3) hrany $\{v_{2i}, v_{2i+1}\} \in M$,
(4) má alespoň jeden *stonek*.

Stonkem nazveme cestu, která začíná ve vrcholu v_1, první hrana je párovací, pravidelně se na ní (jako ve volné střídavé cestě) střídají párovací a nepárovací hrany a poslední vrchol je volný. Stonek může mít i nulovou délku, to když je vrchol v_1 volný v celém grafu G. Stonek také nemusí vůbec existovat, například když je v_1 obsažen v párovací hraně, která není součástí květu C a z níž dále nepokračuje žádná další nepárovací hrana.

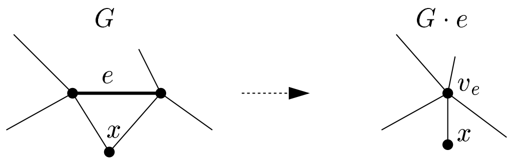
Ilustrace:



Připomeňme ještě definici kontrakce hrany v grafu.

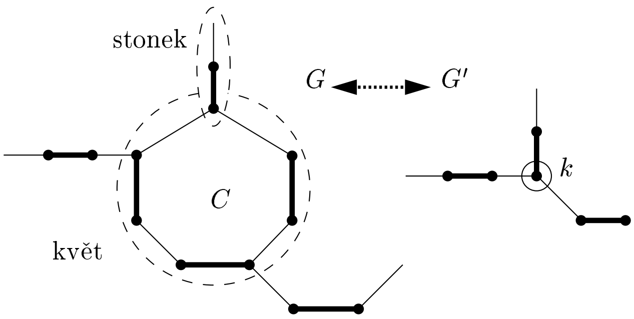
Definice. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf a $e = \{u, v\}$ jeho hrana. Zápis $G \,.\, e$ označuje graf vzniklý z G kontrakcí („smrštěním“) hrany e do jednoho vrcholu, neboli formálně

$$V(G \,.\, e) = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{v_e\},$$
$$E(G \,.\, e) = \left(E \cap \binom{V \setminus \{u, v\}}{2}\right) \cup \bigl\{\{v_e, x\};\ \{x, u\} \in E \vee \{x, v\} \in E\bigr\}.$$



Je-li $F \subseteq E$ množina hran, označuje $G \,.\, F$ graf vzniklý z G postupnou kontrakcí všech hran z F. Je snadno vidět, že výsledek nezávisí na pořadí kontrahovaných hran, ale jen na G a F.

Lemma 2. *Nechť C je květ v grafu G. Potom párování M v G je maximální, právě když $M \setminus E(C)$ je maximální párování v grafu $G \,.\, C$, tj. s květem C zkontrahovaným do jediného vrcholu.*



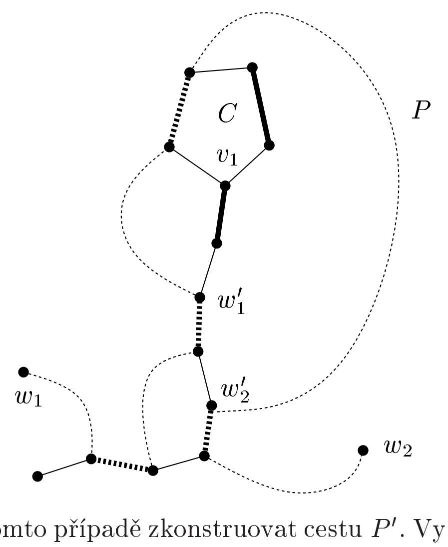
Důkaz. Podle lemmatu 1 stačí ukázat, že v G existuje volná střídavá cesta, právě když volná střídavá cesta existuje v $G \,.\, C$. Označíme $G' = G \,.\, C$ a vrchol, který vznikne kontrakcí C, pojmenujeme k.

Mějme volnou střídavou cestu P v G, ukážeme, že v G' existuje volná střídavá cesta P'.

Pokud je cesta P s květem C disjunktní, kontrakce se jí zjevně nijak nedotkne a bude tak tvořit cestu P' v grafu G'. Nadále nechť má tedy cesta P s květem průnik. Jeden koncový vrchol cesty P označíme w_1, druhý koncový vrchol w_2. Úsek cesty P od w_1 do prvního vrcholu, v němž cesta vstoupí do květu, pojmenujeme P_1, analogicky úsek od w_2 označíme P_2. Pokud existuje stonek S květu C takový, že je disjunktní s P_1, stačí se v grafu G' vydat po P_1 k vrcholu k (který v G' splývá s vrcholem v_1 stonku S) a projít celý stonek S. Toto je hledaná cesta P'. Podobně, existuje-li stonek S disjunktní s P_2, bude cestu P' tvořit úsek P_2 až k vrcholu k a dále celý stonek S.

Nechť nadále mezi všemi platnými stonky květu C neexistuje ani jediný, který by neměl průnik s P_1 či P_2. Mějme stonek S takový, že cesta P v okamžiku napojení úseku P_1, resp. P_2 na S (označme tento vrchol u) po S pokračuje směrem od květu. Tehdy lze cestu P' sestrojit tak, že po projití úseku P_1, resp. P_2 se od vrcholu u po S vydáme směrem od květu až do posledního vrcholu stonku S, který je volný. Můžeme tedy nadále předpokládat, že neexistuje žádný takový stonek S.

Zvolíme libovolný stonek S. Zbývá vyřešit situaci podobnou té na obrázku:



Popíšeme, jak i v tomto případě zkonstruovat cestu P'. Vydáme se po cestě P od vrcholu w_1 a označíme w_1' poslední navštívený vrchol stonku S, než jsme vstoupili do květu C. Analogicky definujeme vrchol w_2'.

Cesta P' bude následující: Porovnáme, který z vrcholů w_1' a w_2' je na stonku S blíže květu C, bez újmy na obecnosti ať je to vrchol w_1'. (V situaci na obrázku je to skutečně vrchol w_1'.) Od příslušného w_1 se vydáme k w_1', od něj po S do vrcholu v_1 (ten v G' splývá s k; není také vyloučeno, že splývají w_1' a v_1), opustíme ho posledním společným vrcholem C a cesty P ve směru z w_1 do w_2 a dále pokračujeme po původní cestě P.

Nyní mějme volnou střídavou cestu P' v G', ukážeme existenci volné střídavé cesty P v G. Rozebereme možnosti:

(1) Když cesta P' neobsahuje k, hledaná $P = P'$.
(2) Když P' končí v k, u výsledné cesty v G potřebujeme zajistit, aby byl koncový vrchol volný. Vrchol k není v G' spárovaný, a tudíž má květ C

stonek nulové délky. Z cesty P tedy můžeme udělat volnou střídavou cestu obejitím květu po správné straně a zakončením ve vrcholu, kde sousedí dvě nepárovací hrany.

(3) Když k je vnitřní vrchol P', potom P' vrchol k právě z jedné strany opouští párovací hranou. V grafu G tedy nutně musí příslušná cesta P vstupovat do květu C nepárovací hranou a opouštět květ stonkem. Stačí jen správně zvolit směr, kterým obejít květ C, a propojit oba úseky cesty.

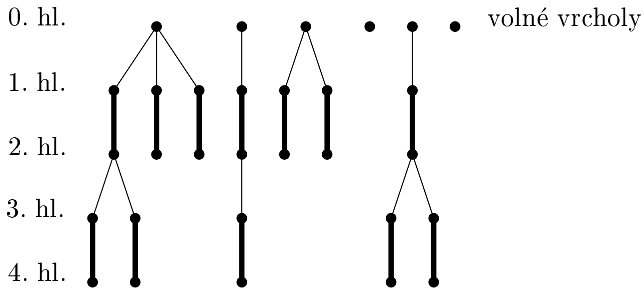
□

Idea Edmondsova algoritmu pro maximální párování je poměrně jednoduchá. Vyzbrojeni lemmatem 1 chodíme po grafu a vyhledáváme volné střídavé cesty, které vylepšujeme. Komplikace nastane, když se v grafu vyskytne květ. Tehdy není jasné, jestli se po něm máme vydat zleva nebo zprava. Situaci vyřešíme zkontrahováním květu do jediného vrcholu, rekurzivním voláním algoritmu na zmenšený graf a následnou rekonstrukcí maximálního párování v původním grafu.

Algoritmus uvedeme v inkrementální podobě, která bude umět k nějakému stávajícímu párování vytvořit párování alespoň o jednu hranu větší, případně oznámit, že párování již bylo maximální. Začneme-li tedy s prázdným párováním, nejvýše po $\frac{n}{2} + 1$ iteracích nalezneme párování maximální.

Edmondsův „zahradní" algoritmus. Vstupem algoritmu je graf G a jeho libovolné párování M, třeba prázdné. Výstupem je párování M', které je alespoň o 1 větší, než párování M, případně $M' = M$ když už M bylo maximální.

(1) Zkonstruujeme maximální možný *Edmondsův les* vzhledem k aktuálnímu M:



Co to znamená? Do nulté hladiny umístíme všechny volné vrcholy. Z každého z nich pustíme prohledání grafu do šířky a sestrojíme maximální strom takový, že se mezi hladinami pravidelně střídají párovací a nepárovací hrany. Z vrcholu liché hladiny tedy pokračujeme vždy po párovací hraně, a z vrcholu sudé hladiny po nepárovací hraně, přičemž nechodíme do vrcholů, kde už jsme byli (poznamenejme ještě, že Edmondsův les není určen jednoznačně).

Některé vrcholy grafu G se v Edmondsově lese vůbec neobjeví, říkejme jim třeba *kompost*. Uvnitř kompostu jsou všechny vrcholy nějak spárovány, neboť všechny volné vrcholy jsou kořeny Edmondsova lesa. Z kompostu vedou nepárovací hrany jen do vrcholů na lichých hladinách Edmondsova lesa a pro další průběh algoritmu nejsou vrcholy z kompostu podstatné.

(2) Pokud existuje hrana e grafu G mezi sudými hladinami různých stromů, nalezli jsme volnou střídavou cestu. Nalezenou cestu zalternujeme (tím přidáme hranu e do párování), vrátíme výsledné párování M' a skončíme.

(3) Pokud existuje hrana mezi sudými hladinami jednoho stromu, nalezli jsme květ C. Tedy, ještě vlastně nenalezli, ale když se od obou konců hrany vydáme vzhůru, v nějakém vrcholu v (nejpozději v kořeni) se obě cesty setkají. Cesta od v nahoru do kořene je stonkem květu C. Zkontrahujeme květ C do jednoho vrcholu k (květ „ustřihneme") a rekurzivně zavoláme algoritmus na graf $G\,.\,C$ s párováním $M \setminus E(C)$. Co mohl algoritmus vrátit:
 a) Staré párování $M \setminus E(C)$ beze změny. V tom případě vrátíme $M' := M$ (kteréžto párování je dle lemmatu 2 maximální v G) a skončíme.
 b) Nějaké větší párování M'. Je-li vrchol k v M' volný, stačí položit $M' := M' \cup E_M(C)$. Je-li k spárovaný, musíme ještě do M' vhodně přidat párování na C, abychom pokryli každý vrchol na C právě jednou. Hrany M' vrátíme a skončíme.

(4) Když neexistuje hrana mezi sudými hladinami (a tedy ani volná střídavá cesta), je $M' := M$ dle lemmatu 1 maximální párování, které vrátíme a skončíme.

Tvrzení. *Edmondsův algoritmus, spuštěný na grafu G a párování M, doběhne v čase $O(n(n+m))$, kde n je počet vrcholů a m počet hran grafu G, a najde párování M' alespoň o jednu hranu větší než M, případně oznámí, že párování M už bylo maximální. Maximální párování tedy lze najít v čase $O(n^2(n+m))$.*

Důkaz. Při důkazu správnosti si uvědomíme, kdy může algoritmus skončit:

(1) V kroku 2, když jsme nalezli volnou střídavou cestu a zalternovali ji. Tím jsme ovšem zvýšili počet hran v párování o 1.
(2) V kroku 3a, to když algoritmus nalezl maximální párování v kontrahovaném grafu. Potom podle lemmatu 2 je nalezené párování maximální i v grafu původním.
(3) V kroku 3b, když jsme z rekurze dostali větší párování M', které jsme vhodně zkombinovali s párováním na květu C. Párování květu C jsme schopni vytvořit stejně velké, jaké existovalo před rekurzivním voláním, algoritmus tedy vrátí větší párování, než bylo M.
(4) V kroku 4, když v grafu neexistuje žádná volná střídavá cesta. Podle lemmatu 1 je takové párování maximální.

Edmondsův les lze průchodem grafu do šířky sestrojit v čase $O(n+m)$. Vyhledání a případné alternování volné střídavé cesty zvládneme v čase $O(n+m)$. Vyhledání květu C a konstrukci grafu, kde je květ C zkontrahovaný, opět umíme stihnout v $O(n+m)$. Na každé úrovni rekurze se tedy vykoná $O(n+m)$ práce, zbývá si uvědomit, jak je to s rekurzivním voláním. Při běhu algoritmu se rekurze spouští pouze jednou, výsledný čas tedy je $O((\textit{největší hloubka rekurze}) \cdot (n+m))$. Hloubka rekurze jistě nepřesáhne $n/2$, neboť s každou kontrakcí květu ubudou alespoň dva vrcholy, jeden průběh algoritmu tudíž zabere $O(n(n+m))$ času.

Při hledání maximálního párování stačí začít s párováním prázdným a opakovaně spouštět Edmondsův algoritmus, který ho v každé iteraci zlepší alespoň o jednu hranu. Protože maximální párování může mít nejvýše $n/2$ hran, proces se po $O(n^2(n+m))$ krocích zastaví. □

Poznámka. Edmondsův les je vhodný pro znázornění, při skutečném programování bychom žádný les nekonstruovali. Pouze bychom z volných vrcholů spustili prohledání do šířky a ke každému vrcholu si pamatovali z jakého volného vrcholu byl navštívený a jaká je jeho hladina (tedy aktuální vzdálenost z volného vrcholu).

Když při prohledávání narazíme na již navštívený vrchol, pak lze jednoduše otestovat, zda-li je to hrana mezi různými stromy nebo uvnitř jednoho stromu, a tedy i zda máme volnou střídavou kružnici nebo květ.

Pokud nebudeme Edmondsův algoritmus používat v inkrementální podobě a přepíšeme ho rovnou jako algoritmus na nalezení maximálního párování z prázdného, odpadnou tím některé opakované operace a lze ho použitím chytrých datových struktur urychlit na čas $O(n^3)$. V současnosti nejrychlejší známý algoritmus na hledání maximálního párování pochází od Silvia Micaliho a Viajaye Vaziraniho a pracuje v čase $O(\sqrt{n} \cdot m)$, kde m je počet hran grafu G.

6. Hamiltonovské kružnice

6.1 Definice hamiltonovských grafů a Chvátalova věta.

Definice. *Hamiltonovská kružnice* v grafu G je kružnice obsahující všechny vrcholy grafu.

Otázka, zda v grafu existuje hamiltonovská kružnice, je slavný NP-úplný problém. Proto se hledají nejrůznější postačující podmínky pro její existenci. Ukážeme si zajímavou vlastnost hamiltonovských grafů, kterou objevil český matematik Václav Chvátal. I některé obtížnější věty z ní vyplynou jako jednoduchý důsledek.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Na počátku položíme $E_0 := E$ a zavedeme graf $[G]^0 := (V, E_0)$. Budeme opakovat následující krok pro $i = 0, 1, 2, \ldots$ tak dlouho, dokud to půjde:

- Když existují dva vrcholy $u, v \in V$, $\{u, v\} \notin E_i$, splňující

$$\deg_{[G]^i} u + \deg_{[G]^i} v \geq |V|,$$

  pak položíme $E_{i+1} := E_i \cup \{u, v\}$ a $[G]^{i+1} := (V, E_{i+1})$.

Graf $[G] := [G]^k$ pro nejvyšší dosažené k nazveme *Chvátalovým uzávěrem* grafu G.

Pozorování. *Chvátalův uzávěr je určen jednoznačně.*

Důkaz. Mějme graf G a pro spor vezměme dva různé Chvátalovy uzávěry $[G]_1$ a $[G]_2$. Do $[G]_1$ jsme postupně přidávali hrany $e_1, \ldots, e_k$, do $[G]_2$ hrany $f_1, \ldots, f_r$. Zvolíme hranu $e_i = \{u, v\}$ první takovou, že $e_i \notin E([G]_2)$.

V čase $i - 1$ byly stupně vrcholů u a v o jednu menší než v čase i a jejich součet byl alespoň $|V|$. Proto jistě

$$\deg_{[G]_2} u + \deg_{[G]_2} v \geq \deg_{[G]_1^{i-1}} u + \deg_{[G]_1^{i-1}} v \geq |V|.$$

Hrana e_i tak nutně musela být zařazena i do $[G]_2$. □

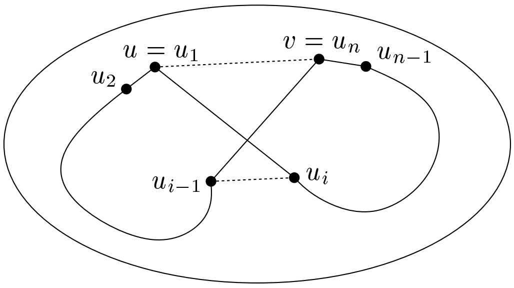
Věta (Chvátal). *Graf G má hamiltonovskou kružnici, právě když hamiltonovskou kružnici má graf $[G]$.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je zřejmá. Pro opačný směr nám stačí ukázat následující tvrzení:

- Nechť pro dva vrcholy $u, v \in V(G)$, $\{u, v\} \notin E(G)$ takové, že $\deg_G u + \deg_G v \geq n$, je graf $G + \{u, v\}$ hamiltonovský. Potom je hamiltonovský i G.

Zpětným obíráním Chvátalova uzávěru $[G]$ o hrany se nakonec vrátíme zpět ke grafu G, který bude mít hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovskou kružnici v $G + \{u, v\}$ označíme K. Pokud $\{u, v\} \notin K$, je vše v pořádku, K je hamiltonovskou kružnicí i v G. Nechť nadále $\{u, v\} \in K$. Předvedeme si, že hranu $\{u, v\}$ lze „přemostit“ jako zde, plné hrany značí novou Hamiltonovskou kružnici:



Bez újmy na obecnosti $K = (u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v)$. Množina A bude obsahovat čísla i kandidátů na počáteční vrchol u_i, množina B čísla i kandidátů na předcházející vrchol u_{i-1}:

$$A = \{i;\ \{u, u_i\} \in E(G)\} \qquad B = \{i;\ \{v, u_{i-1}\} \in E(G)\}.$$

Neprázdný průnik A a B bude znamenat existenci hrany $\{u_i, u_{i-1}\}$ jako na obrázku.

Zřejmě $|A| = \deg_G u$ a $|B| = \deg_G v$, a také určitě $A \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}$ a $B \subseteq \{3, 4, \ldots, n\}$. Proto $|A \cup B| \leq n - 1$. Nyní ověříme, že $A \cap B \neq \emptyset$:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = \deg u + \deg v - |A \cup B| \geq n - |A \cup B| \geq n - (n-1) \geq 1.$$

Tedy pro nějaké $i \in A \cap B$ se v grafu G vyskytují hrany $\{u, u_i\}$ a $\{v, u_{i-1}\}$. Hamiltonovská kružnice K' grafu G pak bude tvaru

$$K' = (u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, v = u_n, u_{n-1}, \ldots, u_i).$$

□

Důsledek. *Nechť v grafu G pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$, $\{u, v\} \notin E(G)$ platí* $\deg u + \deg v \geq n$. *Pak G je hamiltonovský.*

Důkaz. Graf $[G]$ je úplný graf a ten jistě má hamiltonovskou kružnici. Tedy je hamiltonovský i G. □

Důsledek (Diracova věta). *Nechť v grafu G pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí* $\deg v \geq \frac{n}{2}$. *Potom G je hamiltonovský.*

Důkaz. Zřejmé z předchozího důsledku. □

6.2 Problém obchodního cestujícího.

Problém obchodního cestujícího (Traveling Salesman Problem – TSP)[6] je další slavnou NP-úplnou úlohou. Máme daný graf G s ohodnocenými hranami, a úkolem je najít hamiltonovskou kružnici s minimálním součtem vah. Motivací pro TSP je, jak název napovídá, rozvrhnout obchodnímu cestujícímu program návštěv jednotlivých měst, aby v každém byl právě jednou, skončil opět doma, a co nejvíce ušetřil na benzínu.

Jelikož je TSP algoritmicky obtížný, ukážeme polynomiální algoritmus, který dává alespoň přibližný výsledek. Takovým algoritmům se říká *aproximační*. Náš algoritmus však funguje *pouze* na úplných grafech splňujících trojúhelníkovou nerovnost.

[6] Politicky korektní ovšem je „Traveling Salesperson Problem".

Aproximační algoritmus pro úplný graf s trojúhelníkovou nerovností. Vstupem je úplný graf K_n s nezáporným ohodnocením hran w. Pro w platí trojúhelníková nerovnost, tj. pro každé tři hrany tvaru $\{x,y\}$, $\{y,z\}$, $\{x,z\}$ je

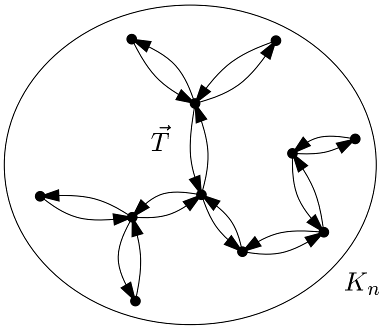
$$w(\{x,y\}) + w(\{y,z\}) \geq w(\{x,z\}).$$

Pro množinu hran S označíme

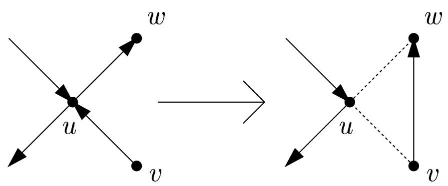
$$w(S) = \sum_{e \in S} w(e).$$

Postupujeme takto:

(1) Najdeme v K_n minimální kostru T.
(2) Graf K_n (včetně kostry T) symetricky zorientujeme, zachováme při tom váhy hran.



(3) Z kostry T vznikne symetrickou orientací podgraf $\vec{T}$, který lze nakreslit jedním tahem, například tak, že ho „obejdeme po obvodu". Sledu hran, který tím dostaneme, říkejme S.
(4) Dokud existuje vrchol u s alespoň dvěma výstupními hranami, nahrazujeme ve sledu S hrany (u,w) a (v,u) hranou (v,w) (ještě jednou připomeňme, že pracujeme s úplným grafem).



(5) Vrátíme S.

Tvrzení. *Algoritmus je polynomiální a vrátí trasu S obchodního cestujícího, jejíž délka je*

$$w(S) = \sum_{e \in S} w(e) \leq 2 \cdot (\textit{optimální řešení TSP}).$$

Důkaz. Kroky 1 až 3 jistě umíme provést v polynomiálním čase. V každé iteraci kroku 4 snížíme $\deg^+(u)$ a $\deg^-(u)$ o jednu, krok 4 se tedy provede nejvýše tolikrát, kolik je počet hran grafu G. Algoritmus je tak polynomiální.

Při běhu algoritmu platí invariant, že sled S prochází všemi vrcholy grafu G. Na konci neexistuje vrchol, ze kterého by vycházely dvě hrany, a sled S tedy prochází každým vrcholem právě jednou.

V kroku 1 je jistě $w(T) \leq \mathrm{OPT}$, optimální trasa obchodního cestujícího musí mít totiž alespoň takovou váhu, jako je váha minimální kostry pokrývající všechny vrcholy. V kroku 3 se díky orientaci $\vec{T}$ započítá každá hrana dvakrát, tedy

$$w(S) = w(\vec{T}) = 2w(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}.$$

Protože ohodnocení hran splňuje trojúhelníkovou nerovnost, hodnota $w(S)$ krokem 4 nevzroste. $\square$

Poznámka. Problém obchodního cestujícího je vzhledem ke své praktické využitelnosti intenzivně studován, sluší se proto říci i něco o současných známých výsledcích.

TSP je NP-těžké C-aproximovat (tedy najít cestu obchodního cestujícího nejvýš C-krát delší než cesta optimální) pro každou konstantu $C > 1$.

Pokud vzdálenostní funkce splňuje trojúhelníkovou nerovnost, TSP zůstává NP-úplný. Dokonce se ví, že pro jisté číslo $\varepsilon_0 > 0$ je i $(1+\varepsilon_0)$-aproximace NP-úplná. Na druhé straně je znám algoritmus aproximující s faktorem $3/2$ (my jsme ukázali jednodušší algoritmus s faktorem 2). Tento algoritmus byl zformulován v sedmdesátých letech a od té doby se nikomu nepodařilo faktor $3/2$ vylepšit.

Ještě speciálnější verze problému obchodního cestujícího je euklidovský TSP, kdy vrcholům úplného grafu K_n jsou přiřazeny body d-dimenzionálního euklidovského prostoru $\mathbb{R}^d$ a ohodnocení hrany $\{u, v\}$ je euklidovská vzdálenost příslušných bodů v $\mathbb{R}^d$. Tuto verzi TSP lze $(1+\varepsilon)$-aproximovat v polynomiálním čase pro každé pevné $\varepsilon > 0$ a každé pevné d (čas ovšem není nutně polynomiální v závislosti na d a ε).

7. Rovinné grafy a Kuratowského věta

Definice. Graf je *rovinný*, pokud existuje jeho nakreslení v euklidovské rovině, v kterém se nakreslení žádných dvou hran nekříží. *Stěny* nakreslení jsou souvislé oblasti, které vzniknou z roviny po odebrání hran.[7]

V následujícím textu dokážeme jednu z nejslavnějších vět z oblasti rovinných grafů. Pochází od polského matematika Kazimierze Kuratowského (1896–1980), po kterém je i pojmenována. Jak uvidíme, věta poskytuje překvapivě jednoduchou kombinatorickou charakterizaci rovinných grafů.

Definice. Nechť $G = (V, E)$ je graf a $e = \{x, y\} \in E$ jeho hrana. Zápis $G \% e$ značí graf

$$G \% e = \big(V \cup \{z\},\ \big(E \setminus \{\{x,y\}\}\big) \cup \{\{x,z\},\{z,y\}\}\big)\,,$$

kde $z \notin V$ je nový vrchol. (Na hranu $\{x, y\}$ „přikreslíme“ nový vrchol z.) Operaci $\%$ budeme nazývat *dělení hrany* a jejím postupným opakováním dostaneme *dělení grafu*.

Věta (Kuratowského). *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf dělení grafu K_5 ani $K_{3,3}$.*

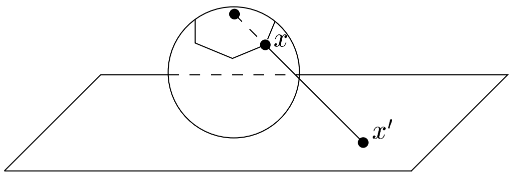
Původní Kuratowského důkaz byl značně rozsáhlý, rozebíral množství možných případů. V nedávné době přišel s elegantnějším důkazem dánský matematik Carsten Thomassen, a ten si předvedeme i my. Než ale přejdeme k samotnému důkazu, ukážeme si základní definice a věty, které v něm budeme potřebovat.

Lemma (ušaté). *Graf G je 2-souvislý, právě když je možné vytvořit ho z libovolné jeho kružnice přidáváním uší (neboli operacemi přidání hrany a dělení hrany).*

Důkaz může čtenář najít v knize *Kapitoly z diskrétní matematiky*.

Lemma 1. *Každý rovinný graf je možné nakreslit tak, že předem zvolený vrchol v (resp. předem zvolená hrana e) leží na hranici vnější stěny.*

Důkaz. Využijeme stereografickou projekci, zobrazení, pomocí kterého umíme rovinný graf překreslit na sféru tak, že ani na ní se žádné dvě hrany nekříží. S výjimkou „severního pólu“ se jedná o bijekci, takže nakreslení je možné převést i zpětně do roviny. Aby vrchol v (případně hrana e) ležel na hranici vnější stěny, stačí vhodně pootočit sférické nakreslení před projekcí do roviny. Konkrétně tak, aby „severní pól“ ležel ve stěně incidentní s vrcholem v (případně hranou e).



Podrobnosti si čtenář může přečíst opět v *Kapitolách z diskrétní matematiky*. □

[7] Tato definice je spíše intuitivní, nám ale bude postačovat. Pokud by čtenáře zajímalo její formální znění, může ho najít například v knize *Kapitoly z diskrétní matematiky* od *J. Matouška* a *J. Nešetřila*.

Pozorování. *Nechť A je vrcholový řez v grafu G s minimálním možným počtem vrcholů. Potom z každého vrcholu z A vede alespoň jedna hrana do každé komponenty indukovaného podgrafu $G \setminus A := G[V(G) \setminus A]$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že v A existuje vrchol x, který není spojený s některou komponentou souvislosti grafu $G \setminus A$. Potom ale množina $A \setminus \{x\}$ bude tvořit též vrcholový řez, který má menší počet vrcholů než A, což je spor s její minimalitou. $\square$

V následujícím textu budeme používat operaci kontrahování hrany, jejíž definici může čtenář najít v kapitole o Edmondsově algoritmu.

Lemma 2. *V každém vrcholově 3-souvislém grafu G o alespoň 5 vrcholech existuje hrana e, jejíž kontrakcí se 3-souvislost neporuší. Důsledkem toho je možné vytvořit každý vrcholově 3-souvislý graf z K_4 několikanásobným opakováním obrácené operace ke kontrakci hrany, přičemž v každém kroku bude navíc vzniklý graf vrcholově 3-souvislý.*

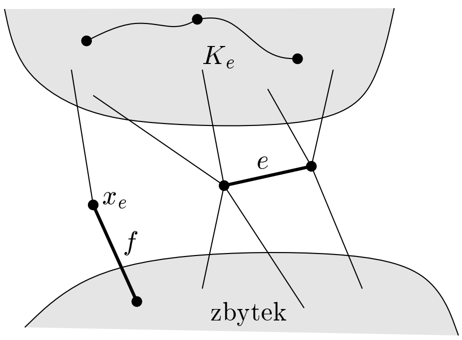
Důkaz. Postupujeme sporem: nechť existuje vrcholově 3-souvislý graf G o alespoň 5 vrcholech a nechť pro každou jeho hranu e platí, že $G\,.\,e$ už není vrcholově 3-souvislý (vrchol, který jsme obdrželi kontrakcí hrany e, budeme nazývat v_e).

Podle definice 3-souvislosti existuje pro každou takovou hranu množina vrcholů $A \subseteq V(G\,.\,e)$, s mohutností $|A| < 3$, po jejímž odebrání se $G\,.\,e$ stane nesouvislým. Pokud by A obsahovala jen jeden vrchol (buď v_e anebo nějaký jiný), nebyl by původní graf G vrcholově 3-souvislý, protože

- když $A = \{v_e\}$, vrcholy hrany e by tvořily řez v G, a
- když $A = \{x\}$, $x \neq v_e$, množina A je řez v grafu G.

Nutně tedy $|A| = 2$. Mohl by vrchol v_e chybět v množině A? V takovém případě by A byl řez v G, takže A obsahuje vrchol v_e a nějaký další.

Shrnutím předešlých úvah dostáváme, že pro každou hranu e existuje vrchol x_e takový, že $e \cup \{x_e\}$ je řez v G. Zvolme nyní hranu e a k ní vrchol x_e tak, abychom po jejich odebrání dostali největší možnou komponentu souvislosti, označíme ji K_e. Naším cílem je pro spor najít nějakou jinou hranu (s příslušným vrcholem), jejímž odebráním vznikne větší komponenta než K_e; tím dokážeme, že taková hrana e neexistuje.



Pokud budeme vrcholy neležící v komponentě K_e nazývat zbytek, z předešlého pozorování plyne, že x_e je spojený hranou (označme ji f) s některým vrcholem ze zbytku. I k této hraně f existuje vrchol x_f, který s ní tvoří vrcholový řez. Rozebereme možnosti, kde všude může ležet vrchol x_f. V každém případě dostaneme větší komponentu souvislosti.

(1) Vrchol x_f leží ve zbytku. Po jeho odebrání komponenta K_e zůstane neporušená a navíc k ní přibude hrana e.
(2) Vrchol x_f je jedním z krajních vrcholů hrany e. Komponenta K_e opět zůstane neporušená a navíc je s ní spojen ještě druhý vrchol hrany e.
(3) Vrchol $x_f \in V(K_e)$. Není úplně jasné, zda-li se komponenta $K_e + e$ nemůže odebráním x_f rozpadnout. V takovém případě bychom však mohli použít vrcholy x_f a x_e jako vrcholový řez v původním grafu, což předpoklad zakazuje. Odebráním x_f se sice komponenta K_e zmenší o jeden vrchol, nicméně hrana e přispěje dvěma novými.

Každá možnost tedy vede ke sporu. □

Lemma 3. *V libovolném rovinném nakreslení rovinného vrcholově* 2*-souvislého grafu je hranicí každé stěny (grafová) kružnice.*

Důkaz. Nepřítele necháme, aby zvolil rovinné nakreslení. Pomocí ušatého lemmatu umíme toto nakreslení vytvořit z kružnice přidáváním uší. Každým přilepeným uchem se nějaká stěna rozpadne na dvě nové, jejichž hranicemi budou opět grafové kružnice. □

Nyní se již můžeme pustit do důkazu hlavní věty.

Důkaz Kuratowského věty. Začneme tou lehčí implikací, zleva doprava. To, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné (mají příliš mnoho hran), plyne například z důsledků Eulerova vzorce. Konkrétně, rovinný graf o pěti vrcholech má nejvýše $3 \cdot 5 - 6 = 9$ hran, zatímco K_5 má 10 hran. Podobně rovinný graf s šesti vrcholy bez trojúhelníku má nejvýše $2 \cdot 6 - 4 = 8$ hran, ale $K_{3,3}$ má 9 hran. Tedy ani jejich dělení nemůže být rovinné.

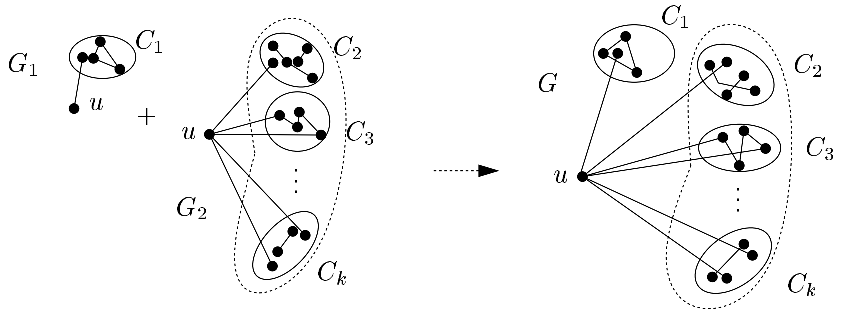
Tu opačnou, podstatnou implikaci ukážeme nyní. Budeme postupovat indukcí podle počtu vrcholů (dále značíme n). V indukčním kroku rozlišíme několik případů podle vrcholové souvislosti grafu.

Každý graf na maximálně čtyřech vrcholech je rovinný. Jinými slovy, K_4 je možné nakreslit bez křížení, a tedy i grafy, které z něj vzniknou odebráním hran či vrcholů, zůstanou rovinnými. První krok indukce (pro $n \leq 4$) máme tedy hotový.

Od nepřítele jsme dostali graf G s $n \geq 5$ vrcholy, který neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$. Předpokládejme, že pro menší grafy věta platí, tj. víme, že graf na méně než n vrcholech bez dělení K_5 a $K_{3,3}$ je rovinný. Podíváme se, jaký má G stupeň vrcholové souvislosti a jednotlivé případy dokážeme zvlášť.

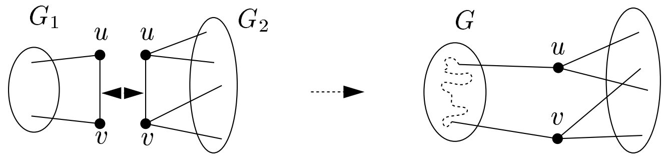
(1) $k_v(G) = 0$ aneb graf G je nesouvislý. Na každou komponentu souvislosti použijeme zvlášť indukční předpoklad a výsledky nakreslíme dostatečně daleko od sebe.
(2) $k_v(G) = 1$. Vrcholová souvislost je rovná 1, takže G obsahuje artikulaci u. Nechť se po odebrání artikulace u graf G rozpadne na komponenty souvislosti $C_1, \ldots, C_k$.

   Uvážíme grafy $G_1 = G[C_1 \cup \{u\}]$ a $G_2 = G[C_2 \cup \ldots \cup C_k \cup \{u\}]$. Podle předpokladu žádný z nich neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ a každý má méně než n vrcholů. Použitím indukčního předpokladu je můžeme nakreslit bez křížení hran. Nyní užijeme lemma 1 a graf G_1 i G_2 překreslíme tak, aby vrchol u ležel na hranici vnější stěny. Jednotlivá nakreslení ztotožníme ve vrcholu u a dostáváme rovinné nakreslení původního grafu G.



(3) $k_v(G) = 2$. Nechť vrcholový řez je množina $\{u, v\}$ a nechť komponenty souvislosti, které vzniknou po jejím odebrání, jsou $C_1, \ldots, C_k$. Nyní uvážíme grafy $G_1 = G[C_1 \cup \{u, v\}] + \{u, v\}$ a $G_2 = G[C_2 \cup \ldots \cup C_k \cup \{u, v\}] + \{u, v\}$ (přidáme hranu $\{u, v\}$, která v původním grafu vůbec nemusela být).

Mohlo v některém G_i vzniknout dělení zakázaného grafu? Jestliže ano, muselo toto dělení obsahovat hranu $\{u, v\}$. Ale protože v původním G existovala cesta mezi u a v přes $G_j, j \neq i$, dostali bychom i v G dělení zakázaného grafu. Oba grafy tedy splňují podmínky indukčního předpokladu a můžeme je nakreslit bez křížení. Opět podle lemmatu 1 grafy G_1 i G_2 překreslíme tak, aby hrana $\{u, v\}$ byla nakreslená na hranici vnější stěny. Jednotlivá nakreslení ztotožníme v u a v, čímž dostaneme rovinné nakreslení G.



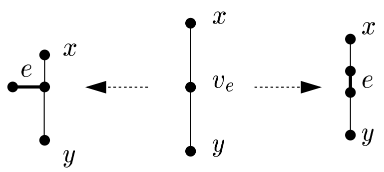
(4) $k_v(G) \geq 3$. Musíme ještě rozebrat případ, kdy je graf G vrcholově alespoň 3-souvislý. Tím se budeme zabývat po zbytek důkazu.

Podle lemmatu 2 v grafu G existuje hrana $e = \{u, v\}$ taková, že $G' = G\,.\,e$ je také vrcholově 3-souvislý.

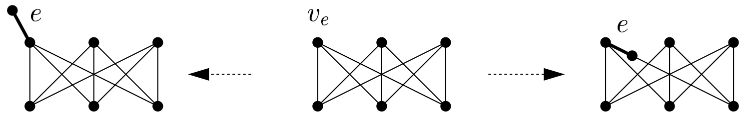
Fakt. *G' rovněž neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Důkaz. Pokud by graf G' nějaké takové dělení obsahoval, určitě by v něm ležel vrchol v_e, jenž vznikl kontrakcí hrany e. Rozebereme případy, jak mohla vypadat situace v G před kontrakcí hrany e, v závislosti na umístění vrcholu v_e.

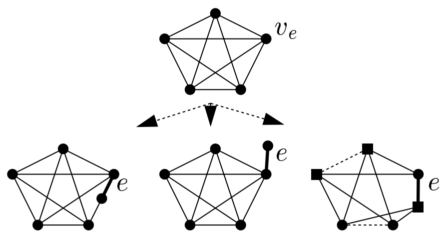
(1) Vrchol v_e leží v některé hraně dělení K_5 nebo $K_{3,3}$ (je jejím vnitřním vrcholem). Je zřejmé, že v takovém případě by i v G muselo existovat dělení některého ze zakázaných grafů, což by byl spor s předpokladem věty.



(2) Vrchol v_e je krajním vrcholem dělení $K_{3,3}$. Jak je vidět i z obrázků, opět by v G bylo dělení $K_{3,3}$ – spor.



(3) Vrchol v_e je krajním vrcholem dělení K_5. První dvě možnosti ukazující situaci před kontrakcí by vedly k dělení K_5 v grafu G, zbývající třetí vede možnost k dělení $K_{3,3}$. Jelikož G neobsahuje ani jeden ze zakázaných grafů, opět jsme dospěli ke sporu.



□

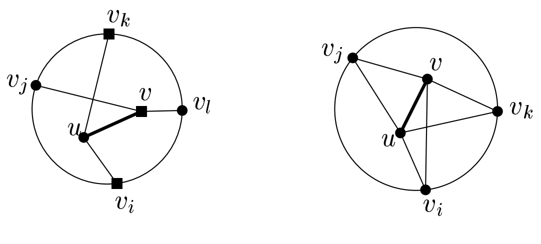
Teď už můžeme dokončit celý důkaz.

Protože graf G' má méně vrcholů než G a neobsahuje dělení zakázaných grafů (využíváme předchozí fakt), je podle indukčního předpokladu rovinný. Vezměme jeho rovinné nakreslení a vynechme vrchol v_e (vznikl kontrakcí hrany e). Graf $G' \setminus \{v_e\}$ je vrcholově 2-souvislý, a tedy podle lemmatu 3 je hranicí každé stěny kružnice. Vrátíme vrchol v_e do stěny s, ve které ležel a poslední věc, kterou musíme ukázat je, že v_e lze roztáhnout zpět na původní hranu e a zachovat přitom rovinnost.

Označme sousedy vrcholu v_e na hranici stěny s jako $v_1, \ldots, v_m$, uvažujeme pořadí ve směru otáčení hodinových ručiček. Některé z těchto vrcholů jsou v G sousedé vrcholu u, jiní sousedé vrcholu v. Vrchol v_e nelze roztáhnout na hranu e a zachovat přitom rovinnost, pouze pokud nastane jeden z následujících případů:

(a) Existují indexy $i < j < k < l$ takové, že v_i, v_k jsou sousedé vrcholu u a v_j, v_l jsou sousedé vrcholu v. Situace je schématicky znázorněna na obrázku vlevo.

(b) Existují vrcholy v_i, v_j, v_k, které jsou sousedé jak u, tak i v (obrázek vpravo).



V obou případech bychom v grafu G našli dělení jednoho ze zakázaných grafů. V obrázku nalevo bychom našli $K_{3,3}$, první část je značena čtverečky, druhá kolečky. V obrázku napravo by vrcholy u, v, v_i, v_j, v_k tvořily K_5. □