

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2008/9 soubor úloh č. 5

(5.1.2009 (večer) nápověda, 15.1.2009 řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Ukažte, že když $p \in (0, 1)$ je libovolná konstanta, tak $G_{n,p}$ je skoro jistě souvislý. Pro jak malou funkci $p(n)$ dokážete dokázat, že $G_{n,p(n)}$ je souvislý skoro jistě? (Počet bodů závisí na tom, jak malé bude vaše $p(n)$.) 2
2. Mějme vrcholy hypergrafu obarvené červeně a modře. Hranu nazveme načervenalou, pokud aspoň polovina jejích vrcholů, avšak ne všechny její vrcholy, jsou obarveny červeně.
 - Dokažte, že pro libovolné $\alpha < 5/4$ každý n -uniformní hypergraf s nejvýše α^n hranami (kde n je dostatečně velké) má obarvení, kde všechny hrany jsou načervenalé. 3
 - Dokažte, že pro $\beta > 5/4$ a n dostatečně velké existují n -uniformní hypergrafy, kde všechna obarvení mají hranu, která není načervenalá. 5
3. Pro množinu T vrcholů grafu G označme $c(T)$ počet hran, které opouštějí T , tj. spojují vrchol z T s vrcholem mimo T . Dokažte, že pro dostatečně velká n existuje graf G s $2n$ vrcholy, v němž pro všechny množiny T velikosti n platí $|c(T) - n^2/2| \leq f(n)$, přičemž $f(n) = o(n^2)$ je vhodná funkce. Pokuste se najít co nejmenší $f(n)$ (za hodně malé $f(n)$ bude hodně mnoho bodů ;-)). 3
4. Buď X množina velikosti $2n$.
 - (a) Buď B uniformně náhodně vybraná podmnožina X . Jaká je pravděpodobnost, že $|B| = n$? Jaká je pravděpodobnost, že $n - a \leq |B| \leq n + a$? 1
 - (b) Najděte konstantu $d > 0$ (nezávislou na n) tak, aby pro libovolné $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ existovala množina $C \subseteq X$ velikosti n , pro kterou

$$\left| |A_i \cap C| - |A_i|/2 \right| \leq d\sqrt{n \ln n}$$

platí pro všechna i . 3

Jednodušší varianta (za 2 body): nepotřebujeme množinu velikosti přesně n , stačí nám, aby platilo $||C| - n| \leq d\sqrt{n \ln n}$.

5. Uvažte následující algoritmus, jehož vstupem je graf s $n \geq 2$ vrcholy (a případně s násobnými hranami). Pokud $n = 2$, algoritmus vypíše počet hran mezi těmi dvěma vrcholy, jinak vybere náhodnou hranu a zkontrahuje ji (příčemž zahodí všechny smyčky, ale zachová všechny násobné hrany). Ukažte, že s pravděpodobností alespoň n^{-2} algoritmus vypíše velikost nejmenšího hranového řezu grafu G . 4
6. Ukažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n existuje bipartitní graf s n -prvkovými částmi L, R tak, že každý vrchol z L má stupeň ≤ 18 a každá množina $S \subseteq L$ s nejvýše $n/3$ vrcholy má alespoň $2|S|$ sousedů v R . (Takový graf se nazývá $(n, 18, 1/3, 2)$ -koncentrátor.) 5
7. Označme $N_G^*(H)$ počet prostých zobrazení $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ zachovávajících hrany i nehrany, neboli počet uspořádaných indukovaných kopií H v G .
Ukažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n existuje graf G s n vrcholy takový, že $N_G^*(H) = n^3/8 + o(n^3)$ pro všechny grafy H s 3 vrcholy, ale $N_G^*(C_4) \neq n^4/64 + o(n^4)$. Jinými slovy, G se chová jako náhodný graf pokud jde o třívrcholové podgrafy, ale ne pokud zkoumáme počet indukovaných čtyřcyklů. 6
8. Pro každý vrchol v grafu $G = (V, E)$, je dán seznam barev L_v . *Seznamové barvení* je zobrazení $b : V \rightarrow \bigcup_{v \in V} L_v$ takové, že $b(v) \in L_v$ pro všechna v a sousední vrcholy mají různé barvy. Graf je k -vybíravý pokud existuje seznamové barvení pro každou volbu seznamů L_v , splňujících $|L_v| = k$ pro všechna v .
Bud' $G = (A \cup B, E)$ bipartitní graf, přičemž $|A| \geq |B|$, a každý vrchol má stupeň alespoň d . Každému vrchlu v přiřadíme coby L_v náhodnou k -prvkovou podmnožinu $[k^4]$. Ukažte, že je-li $k \geq k_0$ (pro vhodné k_0) a d dostatečně velké vzhledem ke k (jak velké?) pak, s kladnou pravděpodobností neexistuje žádné seznamové obarvení. 7
9. Užitím náhodného grafu $G_{n,p}$ ukažte, že pro všechna dostatečně velká t existuje graf s průměrným stupněm $\geq ct\sqrt{\log t}$ a bez minoru K_t ($c > 0$ je vhodná konstanta). (Poznámka, pokud má graf průměrný stupeň $\geq Ct\sqrt{\log t}$ pro dostatečně velké C , pak už minor K_t obsahuje.) 7
10. Ukažte, že pro dostatečně velké d existuje množina $S \subseteq \mathbb{R}^d$ s $> 2d - 1$ body tak, že všechny trojúhelníky s vrcholy v bodech S jsou ostroúhlé (všechny úhly jsou menší než 90°). 3
11. Mějme algoritmus, který odpovídá ano/ne, a dává správnou odpověď s pravděpodobností alespoň $\frac{1}{2} + 1/p(n)$, kde p je nějaký polynom a n velikost vstupu. Ukažte, že polynomiálním počtem opakování lze zařídit, že pravděpodobnost chyby je nejvýše $1/2^n$. 3
12. Ukažte, že skoro jistě graf $G_{n,p}$ má
- maximální stupeň $\leq n(1/2 + o(1))$ a minimální stupeň $\geq n(1/2 - o(1))$ 2

- maximální stupeň $\geq n/2 + \sqrt{n}$ a minimální stupeň $\leq n/2 - \sqrt{n}$ a **3**
- alespoň $n^{1/3}$ vrcholů stupně přesně $\lfloor n/2 \rfloor$. **3**

13. n^2 lidí chce vybrat $\leq n$ -členný výbor. Mezi n^2 lidmi je $n^2/10$ zloduchů, kteří chtějí získat vliv ve výboru. Dobroduši nevědí, kdo jsou zloduší.

Vybírat budou následovně: Každý řekne číslo $1, \dots, n$, a lidé, kteří řekli nejméně časté číslo budou zvoleni. Dobroduši budou vybírat číslo náhodně nezávisle, zloduší udělají co budou chtít (spec. mohou spolupracovat a předvídat, co zvolí dobroduši). Ukažte, že je velmi nepravděpodobné, že by ve výboru bylo více než $1/5$ zloduchů. **4**

14. Ukažte, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $n \geq 2$ existuje graf s n vrcholy a minimálním stupněm $\geq n/2$ v němž každá dominující množina má alespoň $C \log n$ vrcholů. (Tím ukážete, že odhad ze druhé série je asymptoticky nejlepší možný, alespoň pro grafy kde minimální stupeň je lineární.) **3**

- 1 Stačí základní metoda.
- 2 (a) Obarvěte každý vrchol nezávisle, a to s pravděpodobností červené barvy $4/5$.
(b) Zvolte $m = \beta^n$ náhodných hran velikost n na $2n$ bodech. Ukažte (vvtrvalým počítáním), že pro každé pevné 2-obarvení je pravděpodobnost, že žádná hrana nebude načervenalá $< 2^{-n}$.
- 3 Vezměte náhodný graf a pomocí Černovovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost, že selže.
- 4 Použijte Černovovu nerovnost.
- 5 Buď $C \subseteq E(G)$ nejmenší řez. Stačí ukázat, že nikdy nebudeme kontrahovat hranu z C . Všimněte si, že je-li $|C| = k$, pak G má alespoň $kn/2$ hran.
- 6 Zvolte náhodně 18 sousedů každého $v \in L$ a použijte základní metodu.
- 7 Buď $n = 4k$. Rozdělme množinu vrcholů na čtyři stejně velké části A, B, C a D . Dejme do grafu všechny hrany mezi A a C , všechny hrany mezi B a D , a náhodné grafy na $A \cup B$ a na $C \cup D$.
- 8 Napřed zvolte seznamy pro B a vyberte řádné obarvení c vrcholů z A . Vrchol z A budiž dobrý, když jeho sousedi mají za seznamy všechny možné k -množiny. Skoro jistě je alespoň polovina vrcholů v A dobrých. Dobrý vrchol má ve svém okolí hodně barev; odhadněte pravděpodobnost, že všechny dobré vrcholy mohou být obarveny, když jim náhodně přiřadíme seznamy.
- 9 Ukažte že s.j. neexistuje t po dvou disjunktních množin vrcholů kde každá dvojice množin je spojena hranou. Pro každou volbu množin uvažte jen ty, které mají nejvýše $2n/t$ prvků. Volte p konstantní a $n \sim t\sqrt{\log t}$.
- 10 Vezměte náhodné vrcholy v krychli $\{0, 1\}^d$.
- 11 Použijte Černovovu nerovnost.
- 12 Použijte Černovovu nerovnost.
- 13 Ukažte, že každé číslo zvolí zhruba stejný počet dobrodůchů.
- 14 Použijte základní metodu. Pro jednu pevnou množinu $S \subseteq [n]$, jaká je pravděpodobnost že S je dominující v náhodném grafu $G_{n,p}$?