

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2008/9 soubor úloh č. 4

(4.12. nápověda, 11.12. řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen $2/3$ bodů.

Za druhou část příkladu 5 odevzdanou před nápovědou dostanete trojnásobek bodů.

1. Máme n -uniformní hypergraf s nejvýše $4^{n-1}/3^n$ hranami. Ukažte, že jeho vrcholy lze obarvit čtyřmi barvami tak, aby každá hrana obsahovala alespoň jeden vrchol každé barvy. 2
2. Náhodná procházka po přirozených číslech začíná na 1 a pokračuje takto:
 - z 1 jdeme vždy na 2
 - z $i > 1$ jdeme na $i - 1$ nebo na $i + 1$, obojí s pravděpodobností $1/2$.Jaká je střední hodnota počtu kroků, po kterých dosáhneme n ? 3
3. Nechť $p \in (0, 1)$ je konstanta. Pak v náhodném grafu $G_{n,p}$ s pravděpodobností jdoucí k jedné platí, že
 - (a) každé dva vrcholy mají společného souseda. 2
 - (b) “každé dva trojúhelníky jsou spojeny posloupností trojúhelníků”: pro každé vrcholy $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, pokud $x_i x_j$ i $y_i y_j$ jsou hrany pro všechna $1 \leq i < j \leq 3$, pak existují $x_4, x_5, \dots, x_k$ tak, že $x_k = y_3, x_{k-1} = y_2, x_{k-2} = y_1$ a $x_i x_j$ je hrana kdykoli $1 \leq i < j \leq k$ a $j - i \leq 2$. 3
4. Van der Waerdenovo číslo $W(k, r)$ je nejmenší N takové, že pro každé obarvení čísel $1, \dots, N$ pomocí r barev existuje jednobarevná k -prvková aritmetická posloupnost. Dokažte, že $W(k, 2) > c 2^k/k$ pro vhodnou konstantu $c > 0$. 3
5. Dokažte, že
 - $R(k, k) > \frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1)) k 2^{k/2}$ 3
 - $R(k, 3) > c \frac{k^2}{\log^2 k}$ 4
6. Graf G nazveme k -emulzivní, pokud existuje zobrazení $f: E(G) \rightarrow [k]$, takové, že pro každé zobrazení $g: V(G) \rightarrow [k]$ existuje hrana $\{u, v\}$, pro niž $g(u) = g(v) = f(\{u, v\})$.
 - Dokažte, že úplný graf K_n je k -emulzivní, pokud $n = 100k^2 \log k$ (a případně k je velké). 4
 - Ukažte, že jestliže G je k -emulzivní, tak má vrchol stupně alespoň $\frac{1}{100}k^2$. 3

- 1 Obarvěte každý vrchol náhodně a nezávisle.
- 2 Zkoumejte obecněji střední počet kroků z i do n .
- 3 V první části využijte základní metodu. Ve druhé zkuste napřed zvolit vhodné (pevné!) k (nechte se inspirovat částí první).
- 4 Použijte Lovászovo lokální lemma.
- 5 Použijte Lovászovo lokální lemma. V části (a) symetrickou verzi, v části (b) obecnou: uvažte graf $G_{n,p}$ s $p = c_1/\sqrt{n}$, kde $k = c_2\sqrt{n} \log n$. Volte $x_i = c_3/n^{3/2}$, případně $x_i = c_4e^{-\sqrt{n} \log^2 n}$ (podle toho, o jaký jev se jedná).
- 6 V první části ukažte, že náhodné k -obarvení hran skoro jistě má hrany všech barev na každé podmnožině s $\frac{n}{k}$ vrcholy. V druhé části buď f pevná a buď $A_{\{u,v\}}$ jev $f(\{u,v\}) = g(u) = g(v)$ pro náhodné g ; použijte Lovászovo lokální lemma.