

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2008/9 soubor úloh č. 3

(20.11. nápověda, 27.11. řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Buď A matice $n \times n$, její prvky buďte náhodně zvolené $+1$ nebo -1 (každý nezávisle).

(a) Ukažte, že střední hodnota $\det A$ je 0.

1

(b) Spočítejte střední hodnotu $(\det A)^2$.

2

2. Dokažte následující variantu Čebyševovy věty: Buď X reálná náhodná veličina, pro níž $E[X] = 0$ a $Var[X] = \sigma^2$. Pak pro každé $\lambda > 0$ platí

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2}.$$

3

3. Nechť pro $i = 1, \dots, n$ je $v_i = (x_i, y_i)$ dvojice celých čísel, jejichž absolutní hodnota nepřesahuje $2^{n/2}/(100\sqrt{n})$. Dokažte, že existují dvě disjunktní množiny $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{j \in J} v_j.$$

2

4. Buď P monotonní grafová vlastnost, tj. taková, že když G má P , tak každý graf H s $V(H) = V(G)$ a $E(H) \supseteq E(G)$ má také P . Označme $G_{n,p}$ náhodný graf s n vrcholy: každá hrana je přítomna s pravděpodobností p (nezávisle na ostatních hranách). Dokažte, že když $p_1 < p_2$, tak

$$P(G_{n,p_1} \text{ má } P) \leq P(G_{n,p_2} \text{ má } P).$$

3

5. Buď $\mathcal{S}$ systém m podmnožin n -bodové množiny X , každá z nich má velikost alespoň s . Ukažte, že existuje $N \subseteq X$, která protíná každou množinu v $\mathcal{S}$ a její velikost je nejvýše $\lceil (n/s) \ln m \rceil$

3

Dokažte, že existuje systém $\mathcal{S}$ obsahující n^2 množin velikosti s , podmnožin n -bodové množiny X takový, že každá množina, která protíná všechny množiny v $\mathcal{S}$ má alespoň $c(n/s) \ln n$ prvků, pro nějakou konstantu $c > 0$. Přitom $\ln n < s < n/2$.

6

6. Pokud H je podmnožina grupy G , tak H^2 označuje množinu

$$H^2 = \{x \in G \mid \exists y, z \in H, x = y \cdot z\}.$$

Ukažte, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou grupu G s n prvky existuje množina $H \subseteq G$ pro kterou $H^2 = G$ and $|H| < C\sqrt{n \log n}$.

3

- 1** V (a) použijte linearitu střední hodnoty, v (b) se zamyslete jak použít rozptyl.
- 2** Překvapivě funguje stejná idea jako u důkazu Čebyševovy věty: vytvořit vhodnou ‘kvadratickou’ náhodnou veličinu z X a na ni použít Markovovu nerovnost.
- 3** Použijte Čebyševovu nerovnost a postupujte jako na přednášce.
- 4** 1. metoda: uvažte model náhodných grafů, kde volíme různé hrany z různou pravděpodobností.
2. metoda: jak vypadá sjednocení dvou náhodných grafů?
- 5** Zamyslete se, jak lze vybírat podmnožiny velikosti k : (1) každý prvek vyberu s pravděpodobností k/n ; (2) vyberu jednu z $\binom{n}{k}$; (3) k -krát vyberu jeden z n prvků.
Metoda (1) dá množinu velikosti přibližně k (což se nám teď nehodí), (2) přesně k (ale vede na trochu delší počítání), (3) nejvýše k , a to je pro nás to pravé.
- 6** Použijte metodu změny. Jaká je pravděpodobnost, že nějaký prvek G nebude v H^2 ? (Je-li H náhodné.)