

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2008/9 soubor úloh č. 2

(6.11. nápověda, 13.11. řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. (varianty Bollobásovy věty) Buďte A_i, B_i ($i = 1, \dots, m$) libovolné množiny takové, že $A_i \cap B_i$ je prázdná, zatímco pro libovolná $i \neq j$ je jedna z množin $A_i \cap B_j$ a $A_j \cap B_i$ neprázdná. Buď dále $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak

$$\sum_{i=1}^m p^{|A_i|} (1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

2

Pokud navíc $|A_i| = a$ a $|B_i| = b$ pro všechna i , tak $m \leq \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$.

1

2. Ukažte, že pro $n > m(\ln m + 5)$ je náhodné zobrazení z $[n]$ do $[m]$ surjektivní s pravděpodobností alespoň 0.99.

2

3. Uvažme náhodné zobrazení $f : [n] \rightarrow [m]$.

(a) Ukažte, že je-li $n < c_1 \sqrt{m}$, je f prosté s pravděpodobností ≥ 0.99 .

(b) Ukažte, že je-li $n > c_2 \sqrt{m}$, je f prosté s pravděpodobností ≤ 0.01 .

(Přitom c_1, c_2 jsou vhodné konstanty.)

3

Zamyslete se, co to říká o “narozeninovém paradoxu”.

Hypergraf je dvojice (V, E) , kde $E \subseteq \mathcal{P}(V)$. Hypergraf (V, E) je *k-uniformní*, pokud všechny jeho hrany (prvky E) jsou k -prvkové množiny.

4. Dokažte, že každý 3-uniformní hypergraf s n vrcholy a $m \geq n/3$ hranami obsahuje nezávislou množinu vrcholů o velikosti $\geq \frac{2n^{3/2}}{3\sqrt{3}\sqrt{m}}$. (Množina vrcholů hypergrafu, $A \subseteq V$, je *nezávislá*, pokud žádná hrana hypergrafu $e \in E$ není podmnožinou A .)

3

5. Buď G graf s n vrcholy a minimálním stupněm δ . Ukažte, že G má dominující množinu velikosti $O(n \log(\delta + 1)/(\delta + 1))$. (Množina vrcholů grafu je *dominující množina*, pokud každý vrchol grafu je buďto jejím prvkem, nebo sousedem jejího prvku.)

3

6. Buď G graf s n vrcholy a m hranami. Označme $\alpha(G)$ velikost maximální nezávislé množiny v G , $\Delta(G)$ maximální stupeň v G a $d(G)$ průměrný stupeň v G (tj. $d(G) = 2m/n$). Pak platí

(a) $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$

1

(b) $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg v + 1}$

3

(c) $\alpha(G) \geq \frac{n}{d(G)+1}$

1

- 1 Hoďte mincí s pravděpodobností úspěchu p pro každý prvek nosné množiny.
- 2 Použijte základní metodu.
- 3 Použijte odhady pro $1 - p$ pomocí exponenciály (shora i zdola).
- 4 Použijte metodu změny podobně jako v důkaze slabé Turánovy věty.
- 5 Použijte metodu změny podobně jako v důkaze slabé Turánovy věty.
- 6 Na první část stačí hladový algoritmus při libovolném pořadí vrcholů. Na druhou pak hladový algoritmus při vhodném (tj. náhodném) pořadí vrcholů. Konečně třetí část se lehce odvodí z druhé.