

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2008/9 soubor úloh č. 1

(23.10. nápověda, 30.10. řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů. $[n]$ značí $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Buď $(\Omega, 2^\Omega, P)$ konečný pravděpodobnostní prostor, ve kterém všechny elementární jevy mají tutéž pravděpodobnost. Dokažte, že když $|\Omega|$ je prvočíslo, tak žádné dva netriviální jevy nejsou nezávislé. (Triviálními jevy myslíme $\emptyset$ a Ω .) 1
2. Hodíme n -krát spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu ‘úseků’? Úsekem rozumíme několik po sobě jdoucích hodů s týmž výsledkem, např. v posloupnosti PPPOOPOPO je šest úseků. 2
3. Vybereme-li náhodnou permutaci $[n]$, jaká je střední hodnota délky cyklu, ve kterém je obsažena 1? 2
4. Určete střední hodnotu počtu cyklů náhodné permutace $[n]$. 3
5. Každé balení čokolády obsahuje jednu zajímavou informaci z dějin výroby čokolády, uniformně náhodně vybranou z n možností. Jaká je střední hodnota počtu čokolád, které koupíme, než zjistíme všech n informací? 3
6. Dokažte, že když existuje reálné číslo $p \in \langle 0, 1 \rangle$, pro které

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

tak Ramseyovo číslo $R(k, l)$ splňuje $R(k, l) > n$. 1

Pomocí toho dokažte, že

$$R(4, t) \geq \Omega(t^{3/2}/(\ln t)^{3/2}).$$

1

7. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ s následující vlastností. Buď A matice $n \times n$ jejíž složky jsou po dvou různé. Pak existuje taková permutace řádek A , že v žádném sloupci není rostoucí podposloupnost délky alespoň $c\sqrt{n}$. 2

- 1 Vzpomeňte si na definici nezávislosti.
- 2 Výhodnější je počítat počet ‘mezer’ mezi dvěma hody, ve kterých se přeruší úsek.
- 3 Jaká je pravděpodobnost, že 1 je v k -cyklu? (k -cyklus je cyklus délky k .)
- 4 Uvažte vhodné kódování permutace: takové, aby čísla z jednoho cyklu byla pohromadě, aby bylo jednoznačné (bijekce všech permutací na množinu kódů) a konečně, aby z kódu šlo snadno poznat kolik má permutace cyklů.
- 5 Označme T_k počet čokolád, které koupíme, než se dozvíme k informací. Využijte toho, že $T_n = (T_n - T_{n-1}) + (T_{n-1} - T_{n-2}) + \cdots + (T_2 - T_1) + T_1$.
- 6 Podobně jako na přednášce. V druhé části je třeba trochu počítat.
- 7 Volte náhodnou permutaci a odhadněte shora pravděpodobnost, že nebude fungovat.