Věta 1. *Nechť P je grafová vlastnost P vyjádřitelná v MSOL a k je přirozené číslo. Pak existuje algoritmus s lineární časovou složitostí, který rozhodne zda graf G stromové šířky nanejvýš k má vlastnost P.*

Budeme potřebovat několik definic. Grafu G s uspořádanou posloupností t navzájem různých „*hraničních*" vrcholů $v_1, \ldots, v_t$ budeme říkat *t-značkový graf* a budeme ho zapisovat jako $G^{v_1,\ldots,v_t}$ (v případě, že o konkrétních hraničních vrcholech nepotřebujeme mluvit, toto označení v exponentu vynecháváme). Dva značkové grafy $G_1^{v_1,\ldots,v_{t_1}}$ a $G_2^{w_1,\ldots,w_{t_2}}$ jsou *kompatibilní*, jestliže $t_1 = t_2$ a funkce h tž. $h(v_i) = w_i$ pro $1 \leq i \leq t_1$ je isomorfismus podgrafů G_1 a G_2 indukovaných $\{v_1, \ldots, v_{t_1}\}$ a $\{w_1, \ldots, w_{t_2}\}$. Jsou-li $G^{v_1,\ldots,v_t}$ a $H^{w_1,\ldots,w_t}$ dva kompatibilní t-značkové grafy, pak $G^{v_1,\ldots,v_t}H^{w_1,\ldots,w_t}$ budiž graf vzniklý z jejich disjunktního sjednocení zidentifikováním vrcholů v_i a w_i pro každé $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Nechť G_1, G_2 a H jsou kompatibilní značkové grafy a P je libovolná grafová vlastnost. Říkáme, že H *rozlišuje G_1 a G_2 modulo P* jestliže právě jeden z grafů G_1H a G_2H má vlastnost P. Značkové grafy G_1 a G_2 jsou *ekvivalentní modulo P* jestliže G_1 a G_2 jsou kompatibilní a neexistuje žádný značkový graf, který by je rozlišil modulo P, tedy jestliže pro každý značkový graf H kompatibilní s G_1 je $P(G_1H)$ ekvivalentní s $P(G_2H)$. V takovém případě píšeme $G_1 \simeq_P G_2$.

Pozorování 2. *Relace $\simeq_P$ je ekvivalence.*

Jako $\mathcal{G}_t$ označme množinu všech k-značkových grafů pro všechna $k \leq t$. Ekvivalence $\simeq_P$ rozděluje $\mathcal{G}_t$ na třídy navzájem ekvivalentních grafů. Je-li těchto tříd pouze konečně mnoho, pak říkáme, že *P má konečný t-index.*

Věta 1 je důsledkem následujících faktů:

Lemma 3. *Má-li P konečný $(t+1)$-index, pak existuje algoritmus s lineární časovou složitostí, který rozhodne zda graf G stromové šířky nanejvýš t má vlastnost P.*

Lemma 4. *Každá vlastnost vyjádřitelná v MSOL má konečný t-index pro každé přirozené číslo t.*

Začněme důkazem Lemma 3. Budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení. První z nich říká, že nahrazení podgrafu jiným ekvivalentním modulo P neovlivní třídu ekvivalence modulo P celého grafu.

Lemma 5. *Nechť P je grafová vlastnost. Nechť $G_1 = G_0F_1$ a $G_2 = G_0F_2$, kde G_0, F_1 a F_2 jsou kompatibilní značkové grafy. Nechť $v_1, \ldots, v_t$ je posloupnost navzájem různých vrcholů G_0. Jestliže $F_1 \simeq_P F_2$, pak $G_1^{v_1,\ldots,v_t} \simeq_P G_2^{v_1,\ldots,v_t}$.*

Důkaz. Vrcholy $v_1, \ldots, v_t$ patří do společné části G_0 grafů G_1 a G_2, a proto indukují stejný podgraf v G_1 a v G_2. Značkové grafy $G_1^{v_1,\ldots,v_t}$ a $G_2^{v_1,\ldots,v_t}$ jsou tedy kompatibilní. Zbývá proto ukázat, že nejdou rozlišit žádným značkovým grafem H. Nechť $G_1^{v_1,\ldots,v_t}H$ má vlastnost P. Z definice G_1 máme $G_1^{v_1,\ldots,v_t}H = (G_0F_1)^{v_1,\ldots,v_t}H = F_1(G_0^{v_1,\ldots,v_t}H)$. Jelikož F_2 je ekvivalentní s F_1 modulo P, graf $G_0^{v_1,\ldots,v_t}H$ je nemůže rozlišit, a proto i $F_2(G_0^{v_1,\ldots,v_t}H)$ má vlastnost P. Nicméně $F_2(G_0^{v_1,\ldots,v_t}H) = (G_0F_2)^{v_1,\ldots,v_t}H = G_2^{v_1,\ldots,v_t}H$, a H proto nerozliší G_1 od G_2. $\square$

Lemma 6. *Nechť P je grafová vlastnost a $G_1 \simeq_P G_2$. Pak G_1 má vlastnost P právě tehdy, když G_2 má vlastnost P.*

Důkaz. Jelikož $G_1 \simeq_P G_2$, grafy G_1 a G_2 jsou kompatibilní, a jejich značky proto indukují stejný podgraf H. Z definice ekvivalence modulo P plyne, že H nerozliší G_1 od G_2, a tedy $P(G_1H)$ je ekvivalentní s $P(G_2H)$. Nicméně $G_1H = G_1$ a $G_2H = G_2$. $\square$

Mějme graf G se stromovou dekompozicí (T, f) šířky nanejvýš T. Budeme předpokládat, že tato dekompozice je zakořeněná a navíc že každý její uzel má nanejvýš dva syny. Nechť v je uzel T. Jako T_v označme podstrom T tvořený v a jeho potomky. Jako G_v označme podgraf G indukovaný $\bigcup_{u \in V(T_v)} f(u)$. Jako s_v označme posloupnost vrcholů v $f(v) \cap f(z)$ v libovolném pořadí, kde z je otec v v T; je-li v kořen T, pak s_v je prázdná posloupnost. Pak $G_v^{s_v}$ je značkový graf patřící do $\mathcal{G}_{t+1}$. Jako C_v označme podgraf G indukovaný $f(v)$.

Pozorování 7. *Podgraf G_v je sjednocením podgrafů $\{G_w : w \text{ je syn } v\}$ a podgrafu C_v. Formálně, má-li v syny w_1 a w_2, pak*

$$G_v^{s_v} = \left[(C_v^{s_{w_1}} G_{w_1}^{s_{w_1}})^{s_{w_2}} G_{w_2}^{s_{w_2}} \right]^{s_v}.$$

Nyní můžeme přistoupit k důkazu Lemma 3. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou reprezentanti tříd ekvivalence $\simeq_P$ na $\mathcal{G}_{t+1}$, tedy navzájem neekvivalentní značkové grafy takové, že každý značkový graf $G \in \mathcal{G}_{t+1}$ je ekvivalentní s právě jedním z nich; nadefinujme $p(G) = i$ jestliže $G \simeq_P A_i$. Pro $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{t+1}$ tedy máme $G_1 \simeq_P G_2$ právě když $p(G_1) = p(G_2)$.

Označme $N = \max_{i=1}^n |V(A_i)|$. Hodnotu $p(G)$ pro všechny značkové grafy $G \in \mathcal{G}_t$ s nanejvýš $2N + t + 1$ vrcholy (je jich až na isomorfismus konečně mnoho) budeme mít „zadrátovanou“ v algoritmu (ve zdrojáku budeme mít obrovskou tabulku, v níž budeme mít pro každý takový graf napsané číslo $p(G)$, tyto hodnoty se tedy nepočítají v algoritmu). Dále si pro $1 \leq i \leq n$ zadrátujeme, zda A_i má vlastnost P nebo ne.

Pro každý uzel v stromové dekompozice (T, f) si budeme počítat hodnotu $p_v = p(G_v^{s_v})$. Postupujeme rekurzivně od listů, můžeme tedy předpokládat, že tuto hodnotu již známe pro syny v. Nechť v má dva syny w_1 a w_2, $p_{w_1} = a$ a $p_{w_2} = b$. Dle Pozorování 7 a Lemma 5 můžeme v G_v nahradit G_{w_1} grafem A_a a G_{w_2} grafem A_b a nezměníme tím jeho třídu ekvivalence. Formálně (pro přehlednost vynecháváme popisy hraničních vrcholů):

$$G_v = (C_v G_{w_1}) G_{w_2} \simeq_P (C_v G_{w_1}) A_b = (C_v A_b) G_{w_1} \simeq_P (C_v A_b) A_a.$$

Speciálně tedy $p_v = p(G_v) = p(C_v A_b A_a)$. Tuto hodnotu známe, jelikož $|V(C_v A_b A_a)| \leq |V(C_v)| + |V(P_a)| + |V(P_b)| \leq 2N + t + 1$. Hodnotu p_v tedy dokážeme z p_{w_1} a p_{w_2} a podgrafu C_v určit v konstantním čase. Obdobně řešíme případy, když v má jen jednoho syna nebo je to list.

Tímto postupem tedy nakonec určíme p_r, kde r je kořen T. Máme tedy $G = G_r \simeq_P A_{p_r}$. Dle Lemma 6 má G vlastnost P právě když ji má A_{p_r}, což zjistíme vyhledáním v tabulce zadrátované v algoritmu. $\square$

Přistupme nyní k důkazu Lemma 4. Nechť φ je nějaká formule v MSOL. Taková formule může obsahovat volné proměnné a pro tento případ musíme rozšířit definici ekvivalence tak, aby brala do úvahy i ohodnocení těchto proměnných. Pro zjednodušení značení uvažujme následující variantu MSOL:

- máme pouze proměnné pro množiny, a tyto množiny mohou obsahovat jak vrcholy tak hrany.
- máme pouze logické symboly $\neg$, $\vee$ a $\exists$.
- máme následující základní predikáty:
  - $v(X)$: je splněn, pokud množina X obsahuje pouze vrcholy.
  - $h(X)$: je splněn, pokud množina X obsahuje pouze hrany.
  - $s(X)$: je splněn, pokud $|X| = 1$.
  - $e(X, Y)$: je splněn, pokud X i Y obsahuje pouze jeden vrchol a tyto vrcholy jsou sousední
  - $i(X, Y)$: je splněn pokud X obsahuje pouze jeden vrchol v, Y pouze jednu hranu e, a v je incidentní s e.
  - $X \subseteq Y$
  - $X = Y$

Snadno nahlédneme, že tato formulace je ekvivalentní s jinými běžnými definicemi.

Značkový graf G je *φ-ohodnocený (pomocí σ)*, jestliže $\sigma(X)$ je podmnožina vrcholů a hran G pro každou volnou proměnnou X formule φ. Nechť $G_1^{v_1,\ldots,v_{t_1}}$

a $G_2^{w_1,\ldots,w_{t_2}}$ jsou značkové grafy φ-ohodnocené pomocí σ_1 a σ_2. Pak G_1 a G_2 jsou *podobné*, jestliže jsou kompatibilní a σ_1 a σ_2 se shodují na jejich hraničních vrcholech; tedy, pro každou volnou proměnnou X a pro každý vrchol či hranu $a \in G_1[\{v_1, \ldots, v_{t_1}\}]$, je-li a' odpovídající vrchol či hrana $G_2[\{w_1, \ldots, w_{t_2}\}]$, pak $a \in \sigma_1(X)$ právě když $a' \in \sigma_2(X)$. Pro takové grafy pak definujeme φ-ohodnocení pro G_1G_2 tak, že $\sigma(X)$ vznikne z $\sigma_1(X) \cup \sigma_2(X)$ zidentifikováním odpovídajících si vrcholů a hran v $G_1[\{v_1, \ldots, v_{t_1}\}]$ a $G_2[\{w_1, \ldots, w_{t_2}\}]$.

Pro φ-ohodnocené značkové grafy definujeme ekvivalenci modulo φ obdobně jako pro vlastnosti: $G_1 \simeq_\varphi G_2$ jestliže G_1 a G_2 jsou podobné a každý podobný φ-ohodnocený značkový graf H splňuje $G_1H \models \varphi$ právě když $G_2H \models \varphi$. Povšimněme si, že pokud φ nemá žádné volné proměnné, pak definuje grafovou vlastnost P a $G_1 \simeq_\varphi G_2$ je totéž co $G_1 \simeq_P G_2$. Stačí nám tedy ukázat následující zesílení Lemmatu 4.

Lemma 8. *Nechť φ je formule v MSOL a $\mathcal{G}_t^\varphi$ je množina všech k-značkových φ-ohodnocených grafů pro $k \leq t$. Pak $\simeq_\varphi$ má konečně mnoho tříd ekvivalence na $\mathcal{G}_t^\varphi$.*

Lemma 8 dokážeme indukcí dle složitosti formule, předpokládáme tedy, že platí pro všechny podformule φ různé od φ. Především si povšimněme, že podobnost φ-ohodnocených značkových grafů je ekvivalence a má na $\mathcal{G}_t^\varphi$ pouze konečně mnoho tříd (určených jednak podgrafem indukovaným na hraničních vrcholech, jednak restrikcí ohodnocení proměnných na tento podgraf). Stačí tedy ukázat, že $\simeq_\varphi$ podrozdělí každou z těchto tříd pouze na konečně mnoho částí. Zafixujme si proto φ-ohodnocený značkový graf $G \in \mathcal{G}_t^\varphi$ (s ohodnocením σ) a jako $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_t^\varphi$ si označme třídu jemu podobných φ-ohodnocených značkových grafů, a ukažme, že $\simeq_\varphi$ má konečně mnoho tříd ekvivalence na $\mathcal{G}$.

Nejprve je nutno dokázat základ indukce, tedy že tvrzení platí pro základní predikáty. Nechť tedy φ je jedno z následujících:

- $v(X)$: $\simeq_\varphi$ má na $\mathcal{G}$ nejvýše dvě třídy ekvivalence. Do jedné z nich patří grafy $G_1 \in \mathcal{G}$ s ohodnocením σ_1 takovým, že $\sigma_1(X)$ obsahuje hranu; pak $G_1H \not\models \varphi$ pro libovolné $H \in \mathcal{G}$, proto H nerozliší grafy v první třídě. Do druhé z nich patří grafy takové, že $\sigma_1(X)$ neobsahuje hranu; pak $H \in \mathcal{G}$ s ohodnocením σ_H splňuje $G_1H \models \varphi$ právě když $\sigma_H(X)$ neobsahuje hranu, a proto H nemůže rozlišit grafy v druhé třídě.

- $h(X)$: je obdobné.

- $s(X)$: $\simeq_\varphi$ má na $\mathcal{G}$ nejvýše tři třídy ekvivalence: grafy G_1, σ_1 s $|\sigma_1(X)| = 0$, s $|\sigma_1(X)| = 1$ a s $|\sigma_1(X)| > 1$. Pro první třídu platí $G_1H \models \varphi$

jestliže $|\sigma_H(X)| = 1$ a pro třetí $G_1H \models \varphi$ neplatí nikdy, H tedy grafy v rámci těchto tříd nemůže rozlišit. Pro druhou třídu musíme rozebrat dva případy. Jestliže $\sigma(X)$ (a tedy i $\sigma_1(X)$ a $\sigma_H(X)$, z podobnosti) obsahují prvek z hraničního podgrafu, pak $G_1H \models \varphi$ pouze když $|\sigma_H(X)| = 1$ (a tedy $\sigma_1(X) = \sigma_H(X)$). Jestliže $\sigma(X)$ prvek z hraničního podgrafu neobsahuje, pak $G_1H \models \varphi$ pouze když $|\sigma_H(X)| = 0$. V obou případech H nerozliší grafy ve druhé třídě.

Dále budeme postupovat rychleji a důkazy, že prvky v popsaných třídách jsou skutečně navzájem ekvivalentní, necháme na čtenáři.

- $e(X, Y)$: $\simeq_\varphi$ má následující třídy:
  - $|\sigma_1(X)| > 1$, nebo $|\sigma_1(Y)| > 1$, nebo $\sigma_1(X)$ či $\sigma_1(Y)$ obsahuje hranu, nebo $\sigma_1(X)$ i $\sigma_1(Y)$ obsahují právě jeden vrchol a tyto vrcholy nesousedí v G_1, nebo právě jedna ze $\sigma_1(X)$ a $\sigma_1(Y)$ obsahuje právě jeden vrchol v a druhá z nich je prázdná a v není v hraničním podgrafu.
  - $\sigma_1(X)$ i $\sigma_1(Y)$ obsahují právě jeden vrchol a tyto vrcholy sousedí v G_1.
  - $\sigma_1(X) = \sigma_1(Y) = \emptyset$, nebo právě jedna ze $\sigma_1(X)$ a $\sigma_1(Y)$ obsahuje právě jeden vrchol v a druhá z nich je prázdná a v je v hraničním podgrafu.
- $i(X, Y)$: je obdobné.
- $X \subseteq Y$: dvě třídy – buď $\sigma_1(X) \subseteq \sigma_1(Y)$, nebo ne.
- $X = Y$: dvě třídy – buď $\sigma_1(X) = \sigma_1(Y)$, nebo ne.

Zbývá rozebrat logické symboly. Jestliže φ je $\neg\psi$, pak $G_1 \simeq_\varphi G_2$ právě když $G_1 \simeq_\psi G_2$: když H rozliší G_1 od G_2 modulo ψ, pak platí právě jedno z $G_1H \models \psi$ a $G_2H \models \psi$, a tedy právě jedno z $G_1H \models \neg\psi$ a $G_2H \models \neg\psi$. Ekvivalence $\simeq_\varphi$ a $\simeq_\psi$ tedy mají stejné třídy, a z indukce je jich konečně mnoho.

Nechť φ je $\psi_1 \vee \psi_2$. Z indukce má $\simeq_{\psi_1}$ konečně mnoho tříd $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ a $\simeq_{\psi_2}$ konečně mnoho tříd $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ na $\mathcal{G}_t^\varphi$ (přesněji řečeno, na $\mathcal{G}_t^{\psi_1}$ a $\mathcal{G}_t^{\psi_2}$, jelikož ne všechny volné proměnné φ musí být volné v obou z ψ_1 a ψ_2; snadno si ale rozmyslíme, že přidání dalších volných proměnných neovlivní fakt, že počet tříd je konečný). Tvrdíme, že je-li $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{D}_b$ pro nějaké a a b, pak $G_1 \simeq_\varphi G_2$. Stačí ukázat, že je žádné H nerozliší. Nechť tedy platí například $G_1H \models \varphi$. Pak $G_1H \models \psi_1$ nebo $G_1H \models \psi_2$; bez újmy na obecnosti třeba to první. Jelikož $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_a$, máme $G_1 \simeq_{\psi_1} G_2$ a H je tedy nerozliší, a proto i $G_2H \models \psi_1$. Tím pádem $G_2H \models \psi_1 \vee \psi_2$, a proto H nerozliší G_1 od G_2 modulo φ. $\mathcal{G}_t^\varphi$ je proto rozloženo na nanejvýš mn množin $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{D}_b : 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n$ v nichž jsou grafy navzájem ekvivalentní modulo φ, a proto má $\simeq_\varphi$ pouze konečně mnoho tříd ekvivalence na $\mathcal{G}_t^\varphi$.

Nakonec uvažme případ, že φ je $(\exists X)\psi$. Z indukce má $\simeq_\psi$ konečně mnoho tříd $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ má na $\mathcal{G}_t^\psi$. Je-li S podmnožina vrcholů a hran nějakého $G_1 \in \mathcal{G}_t^\varphi$ s ohodnocením σ_1, pak jako $G_1(S)$ označme graf G_1 ohodnocením σ_1', které se shoduje se σ_1 na volných proměnných φ a splňuje $\sigma_1'(X) = S$. Máme tedy $G_1(S) \in \mathcal{G}_t^\psi$. Zadefinujme $I(G_1)$ jako množinu indexů i takových, že existuje podmnožina S vrcholů a hran G_1 pro kterou $G_1(S)$ patří do $\mathcal{C}_i$. Tvrdíme, že je-li $I(G_1) = I(G_2)$, pak $G_1 \simeq_\varphi G_2$. Ukažme, že je žádný graf H nerozliší. Předpokládejme proto $G_1H \models \varphi$, tedy existuje podmnožina T vrcholů a hran G_1H taková, že G_1H s ohodnocením X množinou T splňuje ψ. Nechť $T_1 = T \cap G_1$ a $T_H = T \cap H$. Máme tedy $G_1(T_1)H(T_H) \models \psi$. Nechť a je index takový, že $G_1(T_1) \in \mathcal{C}_a$. Pak a patří do $I(G_1)$, a tedy i do $I(G_2)$. Z definice I tedy existuje $S \subseteq G_2$ tak, že $G_2(S) \in \mathcal{C}_a$, a tedy $G_1(T_1) \simeq_\psi G_2(S)$. Jelikož $G_1(T_1)H(T_H) \models \psi$ a $H(T_H)$ nemůže rozlišit $G_1(T_1)$ od $G_2(S)$ modulo ψ, máme $G_2(S)H(T_H) \models \psi$. Graf G_2H s ohodnocením X množinou $S \cup T_H$ tedy splňuje ψ, a proto $G_2H \models \varphi$. Tím jsme ukázali, že H nerozliší G_1 od G_2 modulo φ, a jelikož jsme H zvolili libovolně, plyne z toho $G_1 \simeq_\varphi G_2$. Ekvivalence $\simeq_\varphi$ má tedy nejvýše 2^n tříd na $\mathcal{G}_t^\varphi$ odpovídajícím všem možným volbám $I(G_1) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. $\square$