

Graf je k -linkovaný, jestliže pro každých $2k$ navzájem různých vrcholů $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ v něm existují navzájem vrcholově disjunktní cesty $P_1, \dots, P_k$, kde P_i spojuje s_i s t_i pro $i = 1, \dots, k$. Takovýmto cestám budeme říkat $s - t$ -linkování. Naším cílem je dokázat následující výsledek.

Věta 1. *Je-li G $2k$ -souvislý a obsahuje-li minor K_{4k} , pak G je k -linkovaný.*

Pro potřeby indukce budeme dokazovat následující silnější tvrzení.

Věta 2. *Nechť G je graf, $S = \{s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k\}$ podmnožina jeho vrcholů a $H_1, \dots, H_{4k}$ navzájem vrcholově disjunktní neprázdné podgrafy G splňující následující podmínky:*

- (a) *Pro $1 \leq i \leq 4k$, jestliže H_i není souvislý, pak každá jeho komponenta obsahuje vrchol z S .*
- (b) *Pro $1 \leq i < j \leq 4k$, jestliže G neobsahuje hranu s jedním koncem ve $V(H_i)$ a druhým ve $V(H_j)$, pak jak H_i tak H_j obsahují vrchol z S .*
- (c) *Pro všechny podgrafy $A, B \subseteq G$, jestliže $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a existuje $i \in \{1, \dots, 4k\}$ tž. $H_i \subseteq B - V(A)$, pak $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k$.*

Potom G obsahuje $s - t$ -linkování.

Věta 1 zjevně plyne z věty 2: mějme libovolné $S = \{s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k\} \subseteq V(G)$. Z předpokladů G obsahuje minor K_{4k} , tedy existují disjunktní neprázdné souvislé podgrafy $H_1, \dots, H_{4k} \subset V(G)$ takové, že mezi každými dvěma z nich vede hrana; tyto podgrafy zjevně splňují podmínky (a) a (b) věty 2. Jelikož G je $2k$ -souvislý, každý jeho řez má velikost alespoň $2k$, a proto G splňuje i podmínku (c). Věta 2 tedy implikuje, že G obsahuje $s - t$ -linkování, jak jsme požadovali.

Přistupme nyní k důkazu věty 2. Budeme postupovat indukcí, předpokládáme tedy, že tvrzení platí pro všechny vlastní minory G . Uvažme nejprve případ, že existují podgrafy $A, B \subseteq G$ a $i \in \{1, \dots, 4k\}$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$, $H_i \subseteq B - V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = 2k$. Položme $S' = V(A) \cap V(B)$ a $H'_j = H_j \cap B$ pro $1 \leq j \leq 4k$. Z Mengerovy věty a podmínky (c) plyne, že existují navzájem vrcholově disjunktní cesty $S_1, \dots, S_k, T_1, \dots, T_k \subset G$ s jedním koncem v S a druhým v S' , kde s_j je konec S_j a t_j je konec T_j pro $1 \leq j \leq k$. Konec S_j v S' označme s'_j a konec T_j v S' označme t'_j .

Jelikož $S \subset V(A)$ a $H_i \subseteq B - V(A)$, vidíme, že H_i je disjunktní s S a $H'_i = H_i$. Mějme libovolné $j \in \{1, \dots, 4k\}$ různé od i . Jelikož H_i je disjunktní s S , dle podmínky (b) G obsahuje hranu e spojující H_i s H_j . Tato hrana má jeden konec (ten v H_i) obsažen v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$, a jelikož

$G = A \cup B$, máme $e \in E(B)$. Proto druhý konec e patří do $B \cap H_j$, a H'_j je tedy neprázdné. Ukažme, že B s množinou S' a podgrafy $H'_1, \dots, H'_{4k}$ splňuje podmínky věty 2:

- (a) Mějme libovolné $j \in \{1, \dots, 4k\}$, a předpokládejme, že H'_j obsahuje komponentu F disjunktní s S' . Pak F je i komponenta H_j : v jiném případě by H_j obsahovalo hranu e s jedním koncem v $V(F) \subseteq V(B) \setminus S' = V(B) \setminus V(A)$ a druhým koncem v $H_j - V(B)$, a taková hrana e by nemohla patřit ani do A ani do B . Jelikož $V(F) \subseteq V(B) \setminus V(A)$ a $S \subset V(A)$, vidíme, že F neobsahuje žádný vrchol z S . Z podmínky (a) pro G a H_j tedy plyne, že H_j je souvislý, a tedy $H_j = F$. Pak ale i $H'_j = F$ je souvislý.
- (b) Mějme libovolné různé $j, m \in \{1, \dots, 4k\}$. Pokud H'_j i H'_m obsahují vrchol z S' , pak je podmínka (b) zjevně splněna. BÚNO tedy předpokládejme, že $H'_j \subseteq B - S' = B - V(A)$. Speciálně dle předchozího bodu víme, že $H'_j = H_j$ a H_j tedy neobsahuje vrchol z S . Díky podmínce (b) pro G , H_j a H_m proto v G existuje hrana e spojující H_j a H_m . Konec e v H_j leží v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$ a tedy $e \in E(B)$. Hrana e tedy v B spojuje vrchol H'_j s vrcholem z $H_m \cap B = H'_m$.
- (c) Nechť $B = A' \cup B'$, $S' \subseteq V(A')$ a existuje $j \in \{1, \dots, 4k\}$ tž. $H_j \subseteq B' - V(A')$. Pak $G = (A \cup A') \cup B'$, $S \subseteq V(A \cup A')$ a $H_j \subseteq B' - V(A') = B' - (V(A) \cup V(A'))$. Z podmínky (c) pro G tedy máme $|(V(A) \cup V(A')) \cap V(B')| \geq 2k$. Jelikož $(V(A) \cup V(A')) \cap V(B') = V(A') \cap V(B')$, podgrafy A' a B' splňují podmínku (c) pro B .

Jelikož $S \subsetneq A$ a $|V(A) \cap V(B)| = |S|$, vidíme, že existuje vrchol $v \in V(A) \setminus V(B)$, a B je proto vlastní podgraf G . Z indukčního předpokladu tedy B obsahuje $s' - t'$ -linkování $P'_1, \dots, P'_k$. Položíme-li $P_j = S_j \cup P'_j \cup T_j$ pro $1 \leq j \leq k$, pak $P_1, \dots, P_k$ je $s - t$ -linkování v G .

Zbývá tedy případ, kdy

- (★) každé dva podgrafy $A, B \subseteq G$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$ a existuje $i \in \{1, \dots, 4k\}$ tž. $H_i \subseteq B - V(A)$, splňují $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k + 1$.

Nechť e je hrana G . Jestliže oba konce e leží v S , pak $G - e$ splňuje všechny předpoklady věty 2:

- (a) Triviálně plyne z (a) pro G , pokud e není most v H_i . Pokud e je most v H_i , pak obě komponenty vzniklé odebráním e obsahují vrchol z S .

- (b) Triviálně plyne z (b) pro G , pokud e není jediná hrana mezi H_i a H_j .
Pokud e je hrana mezi H_i a H_j , pak H_i i H_j obsahují vrchol z S .
- (c) Triviálně plyne z (c) pro G .

Z indukce $G - e$ obsahuje $s - t$ -linkování, a tedy i G obsahuje $s - t$ -linkování. Můžeme proto předpokládat, že e má alespoň jeden konec mimo S .

Jestliže e má oba konce v $V(H_i)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, 4k\}$, nebo jestliže e má alespoň jeden konec v $V(G) \setminus (V(H_1) \cup \dots \cup V(H_{4k}))$, pak uvažme graf G/e vzniklý kontrakcí hrany e , s podgrafy $H'_j = H_j/e$ pro $j = 1, \dots, 4k$. Vlastnosti (a) a (b) jsou triviálně splněné. Nechť $G/e = A' \cup B'$, kde $S \subseteq V(A')$ a $H'_m \subseteq B' - V(A')$ pro nějaké $m \in \{1, \dots, 4k\}$, a jako A a B označme podgrafy G takové, že $G = A \cup B$, $A' = A/e$ a $B' = B/e$. Pak $S \subseteq V(A)$ a $H_m \subseteq B - V(A)$. Dle $(\star)$ máme $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k+1$, a proto $|V(A') \cap V(B')| \geq 2k$. Graf G/e tedy splňuje podmínky věty 2, a z indukce proto obsahuje $s - t$ -linkování. Dekontrakcí hrany e dostáváme $s - t$ -linkování v G .

Zbývá proto případ, že S je nezávislá množina a každá hrana G spojuje vrcholy v různých podgrafech H_i a H_j . Speciálně pro každé $i = 1, \dots, 4k$, $V(H_i)$ je nezávislá množina, a z podmínky (a) plyne, že buď $V(H_i) \subseteq S$, nebo H_i je jen jeden vrchol. Zjevně také můžeme předpokládat, že každý vrchol G patří buď do S nebo do $H_1 \cup \dots \cup H_{4k}$, jinak ho můžeme smazat. Z podmínky (b) tedy plyne, že $G - S$ je klika.

Pokud existuje párování mezi S a $V(G - S)$, které pokrývá S , pak toto párování spolu s hranami v klice $G - S$ obsahuje $s - t$ -linkování. Jinak z Hallovy věty existuje $S' \subseteq S$ taková, že všichni sousedi S' leží v množině $Y \subseteq V(G - S)$ a $|Y| < |S'|$. Pak ale položíme $A = G[S \cup Y]$ a $B = G - S'$ a máme $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = |(S \setminus S') \cup Y| < 2k$. Navíc $|V(A)| = |S| + |Y| \leq 4k - 1$, a tedy existuje H_i disjunktní s $V(A)$. Podgrafy A a B jsou však ve sporu s podmínkou (c), a tento případ tedy nemůže nastat.