Algoritmické aspekty stromových rozkladů

Zdeněk Dvořák

9. listopadu 2016

1 Algoritmy pro grafy omezené stromové šířky

Lemma 1. *Nechť (T, β) je stromová dekompozice grafu G taková, že $\beta(u) \not\subseteq \beta(v)$ pro každé dva různé $u, v \in V(T)$. Pak T má nejvýše $|V(G)|$ vrcholů.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů T. Tvrzení je triviální, jestliže $|V(T)| = 1$. Předpokládejme tedy, že $|V(T)| > 1$. Nechť v je list T a u jeho soused. Pak existuje nějaký vrchol $x \in \beta(v) \setminus \beta(u)$. Jestliže $\beta(v) \setminus \{x\} \not\subseteq \beta(u)$, pak položme $T' = T$, $\beta'(v) = \beta(v) \setminus \{x\}$ a $\beta'(z) = \beta(z)$ pro $z \neq v$. Jestliže $\beta(v) \setminus \{x\} \subseteq \beta(u)$, pak $T' = T - v$ a $\beta'(z) = \beta(z)$ pro $z \neq v$. Pak (T', β') je stromová dekompozice $G - v$ taková, že $\beta'(u') \not\subseteq \beta'(v')$ pro každé dva různé $u', v' \in V(T')$, a z indukčního předpokladu máme $|V(T')| \leq |V(G - v)| = |V(G)| - 1$. Proto $|V(T)| \leq |V(T')| + 1 \leq |V(G)|$. □

Stromová dekompozice (T, β) je *čistá*, jestliže

- T je zakořeněný a kořen r splňuje $\beta(r) = \emptyset$.
- Každý list v splňuje $\beta(v) = \emptyset$.
- Pro každý vrchol v, který není list, nastává jedna z následujících možností:
  - v má právě jednoho syna v' a splňuje $\beta(v) = \beta(v') \cup \{x\}$ pro nějaký vrchol x.
  - v má právě jednoho syna v' a splňuje $\beta(v) = \beta(v') \setminus \{x\}$ pro nějaký vrchol x.
  - v má právě dva syny v_1 a v_2 a splňuje $\beta(v) = \beta(v_1) = \beta(v_2)$.

Pozorování 2. *Ze stromové dekompozice šířky k s n vrcholy lze v lineárním čase vytvořit čistou stromovou dekompozici s nejvýše $(4k + 2)n$ vrcholy.*

Důsledek 3. *Graf G stromové šířky k má čistou stromovou dekompozici šířky k s $O((k+1)|V(G)|)$ vrcholy.*

Pro vrchol v zakořeněné stromové dekompozice (T,β) grafu G označme jako T_v podstrom T zakořeněný ve v a jako G_v podgraf G indukovaný $\bigcup_{u\in V(T_v)}\beta(u)$.

Lemma 4. *Nechť (T,β) je čistá stromová dekompozice grafu G. Jestliže (T,β) má šířku k a n vrcholů, pak velikost největší nezávislé množiny v G lze určit v čase $O(k2^kn)$.*

Důkaz. Pro $X\subseteq\beta(v)$ si jako $i(v,X)$ označme velikost největší nezávislé množiny S v G_v takové, že $S\cap\beta(v)=X$. Pak

- Je-li v list, pak $i(v,\emptyset)=0$.
- Pro každý vrchol v, který není list, a $X\subseteq\beta(v)$:
  - jestliže v má právě jednoho syna v' a splňuje $\beta(v)=\beta(v')\cup\{x\}$ pro nějaký vrchol x,
    * jestliže $x\notin X$, pak $i(v,X)=i(v',X)$;
    * jestliže $x\in X$ a X není nezávislá množina v G, pak $i(v,X)=-\infty$;
    * jestliže $x\in X$ a X je nezávislá množina, pak $i(v,X)=i(v',X\setminus\{x\})+1$.
  - Jestliže v má právě jednoho syna v' a splňuje $\beta(v)=\beta(v')\setminus\{x\}$ pro nějaký vrchol x, pak
  $$i(v,X)=\max(i(v',X),i(v',X\cup\{x\})).$$
  - Jestliže v má právě dva syny v_1 a v_2 a splňuje $\beta(v)=\beta(v_1)=\beta(v_2)$, pak
  $$i(v,X)=i(v_1,X)+i(v_2,X)-|X|.$$

Kořen r splňuje $i(r,\emptyset)=\alpha(G)$. $\square$

Jako *k-značkovaný graf* označme dvojici (G,π), kde $\pi:[k]\to V(G)$ je prostá. Dva k-značkované grafy $\mathbf{G_1}=(G_1,\pi_1)$ a $\mathbf{G_2}=(G_2,\pi_2)$ jsou *kompatibilní*, jestliže $\pi_2\pi_1^{-1}$ je izomorfismus $G_1[\pi_1([k])]$ a $G_2[\pi_2([k])]$. Jako $\mathbf{G_1}+\mathbf{G_2}$ označme graf G vzniklý z G_1 a G_2 zidentifikováním vrcholů $\pi_1(i)$ a $\pi_2(i)$ pro $i=1,\ldots,k$.

Pro grafovou vlastnost φ a k-značkované grafy $\mathbf{G_1}$ a $\mathbf{G_2}$ pišme $\mathbf{G_1}\sim_\varphi\mathbf{G_2}$, jestliže $\mathbf{G_1}$ a $\mathbf{G_2}$ jsou kompatibilní a pro každý další kompatibilní k-značkovaný graf $\mathbf{H}$ platí $\varphi(\mathbf{G_1}+\mathbf{H})=\varphi(\mathbf{G_2}+\mathbf{H})$.

Lemma 5. *Nechť $\sim_\varphi$ má pouze konečně mnoho tříd ekvivalence pro $(\leq k)$-značkované grafy. Nechť (T, β) je čistá stromová dekompozice grafu G šířky nejvýše $k-1$ s n vrcholy. Pak $\varphi(G)$ lze určit v čase $O(n)$ (kde multiplikativní konstanta závisí na k a φ).*

Důkaz. Pro každý $(\leq k)$-značkovaný graf $\mathbf{H}$ si jako $\mathbf{H}_0$ označme nejmenší $(\leq k)$-značkovaný graf takový, že $\mathbf{H} \sim_\varphi \mathbf{H}_0$. Nechť

$$M = \max\{|V(\mathbf{H}_0)| : \mathbf{H} \text{ je } (\leq k)\text{-značkovaný graf}\}.$$

Toto maximum existuje, jelikož $\sim_\varphi$ má pouze konečně mnoho tříd ekvivalence. Graf $\mathbf{H}_0$ si předpočítáme pro všechny $(\leq k)$-značkované grafy $\mathbf{H}$ s nejvýše $2M$ vrcholy (lze mít v algoritmu „zadrátované“). Dále si zadrátujeme $\varphi(H)$ pro všechny grafy H s nejvýše M vrcholy.

Jestliže G má nejvýše M vrcholů, dokážeme tedy $\varphi(G)$ určit v konstantním čase. Jinak nalezneme vrchul $v \in V(T)$ takový, že $|V(G_v)| > M$, ale $|V(G_{v'})| \leq M$ pro každého syna v' vrcholu v. Pak $|V(G_v)| \leq 2M$. Jako $\mathbf{H}$ si označme $(\leq k)$-značkovaný graf (G_v, π), kde $\pi : [p] \to \beta(v)$ je libovolná bijekce. Nechť G_0 vznikne z G nahrazením podgrafu G_v podgrafem $\mathbf{H}_0$ (formálně: G lze vyjádřit jako $\mathbf{H}+\mathbf{H}'$ pro nějaký $(\leq k)$-značkovaný graf $\mathbf{H}'$, a $G_0 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$). Pak $\varphi(G_0) = \varphi(G)$ a $|V(G_0)| < |V(G)|$, můžeme tedy tento postup opakovat, dokud se počet vrcholů nesníží pod M. □

2 Aproximace stromové šířky

Lemma 6. *Nechť G je graf stromové šířky k a nechť $f : V(G) \to \mathbf{R}^+$ je libovolná funkce. Pro $X \subseteq V(G)$ označme $f(X) = \sum_{x\in X} f(x)$. Pak existuje $S \subseteq V(G)$ velikosti nejvýše $k+1$ taková, že každá komponenta C grafu $G-S$ splňuje $f(V(C)) \leq f(V(G))/2$.*

Důkaz. Nechť (T, β) je stromový rozklad G šířky k. Kdyby požadovaná množina S neexistovala, pak pro každé $v \in V(T)$ existuje soused u takový, že $f_{v,u} := f\left(\bigcup_{x\in V(T_{v,u})} \beta(x) \setminus \beta(v)\right) > f(V(G))/2$. Označme $\pi(v) := u$. Jelikož T je strom, existují sousední vrcholy u a v tž. $\pi(u) = v$ a $\pi(v) = u$. Pak ale $f(V(G)) \geq f_{v,u} + f_{u,v} > f(V(G))$, což je spor. □

Důsledek 7. *Jestliže G je graf stromové šířky k, pak pro každou $W \subseteq V(G)$ existuje $S \subseteq V(G)$ velikosti nejvýše $k+1$ taková, že každá komponenta $G-S$ obsahuje nejvýše $|W|/2$ vrcholů z W.*

Lemma 8. *Nechť pro každý podgraf G' grafu G a pro každé $W \subseteq V(G')$ existuje množina $S \subseteq V(G')$ velikosti nejvýše s taková, že každá komponenta*

$G' - S$ obsahuje nejvýše $|W|/2$ vrcholů z W. Nechť R je libovolná podmnožina vrcholů G velikosti nejvýše $2s+1$. Pak G má stromovou dekompozici (T, β) šířky $3s$ takovou, že $R \subseteq \beta(r)$ pro nějaký vrchol $r \in V(T)$.

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů G. Jestliže $|V(G)| \leq 3s+1$, tvrzení platí triviálně; nechť $|V(G)| \geq 3s+2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $|R| = 2s+1$, jinak můžeme přidat vrcholy do R. Nechť $S \subseteq V(G)$ je množina velikosti nejvýše s taková, že každá komponenta $G - S$ obsahuje nejvýše $\lfloor |R|/2 \rfloor = s$ vrcholů z R. Nechť $C_1, \ldots, C_m$ jsou komponenty $G - S$ a pro $1 \leq i \leq m$, označme $G_i = G[V(C_i) \cup S]$ a $R_i = (R \cap V(C_i)) \cup S$. Graf G_i obsahuje nejvýše $\lfloor |R|/2 \rfloor + s = 2s < |R|$ vrcholů z R, a proto $|V(G_i)| < |V(G)|$. Z indukčního předpokladu má G_i stromový rozklad (T_i, β_i) šířky nejvýše $3s$ tž. $R_i \subseteq \beta(r_i)$ pro nějaký vrchol $r_i \in V(T_i)$.

Nechť T je strom získaný z $T_1, \ldots, T_m$ přidáním vrcholu r sousedícího s r_1, $\ldots, r_m$. Nechť $\beta(v) = \beta_i(v)$ pro $v \in V(T_i)$ a $1 \leq i \leq m$ a nechť $\beta(r) = R \cup S$. Pak (T, β) je stromový rozklad G šířky nejvýše $3s$ a $R \subseteq \beta(r)$. $\square$

Důsledek 9. *Pro každé $s \geq 0$ existuje algoritmus s polynomiální časovou složitostí, který pro graf G buď rozhodne, že $\mathrm{tw}(G) \geq s$, nebo vrátí stromový rozklad G šířky nejvýše $3s$.*

3 Stromová šířka rovinných grafů

Věta 10. *Nechť G je rovinný graf poloměru r; pak $\mathrm{tw}(G) \leq 3r$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti je G triangulace. Nechť T je strom G prohledání do šířky s kořenem v; tj. každá cesta z v v T má délku nejvýše r. Nechť $G^\star$ je duál G a $T^\star$ je jeho podgraf tvořený hranami tž. odpovídající hrany G nepatří do T. Nahlédněme, že $T^\star$ je strom. Každý vrchol $f \in V(T^\star)$ odpovídá stěně grafu G incidentní s nějakými třemi vrcholy a_f, b_f a c_f. Nadefinujme $\beta(f)$ jako sjednocení vrcholů cest v T z a_f, b_f a c_f do v; zjevně $|\beta(f)| \leq 3r+1$. Stačí tedy vypozorovat, že $(T^\star, \beta)$ je stromový rozklad G. $\square$